

ANALYSIS OF FLOW IN INJECTION MOLDS, THE DERIVATION OF THE GOVERNING EQUATIONS FOR THE MATHEMATICAL MODELLING OF THE FLOW OF POLYMER MELT

Abdulmecit GÜLDAŞ*, Onuralp ULUER, Ahmet ÖZDEMİR
Gazi Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Makina Eğitimi Bölümü, 06500 Beşevler, Ankara,
TÜRKİYE, e-mail: aguldas@gazi.edu.tr

ABSTRACT

In the injection molds, the governing equations that describe the flow front of a polymer melt and form of the pressure, velocity and temperature distribution have been derived for the mathematical modeling. The continuity, the momentum and the energy equations derived from different methods in the literature were obtained in detail and they were prepared as a set on which the solving methods of differential equations can be applied. In discretization process using Finite Control Volume, Full Implicit and Upwind methods were used. For two dimensional cavity, variations of density were calculated using Boussinesq Approach by Phoneics program. Filling simulation in the cavity were achieved. In addition, solid layer was determined by Darc'y method.

Key Words: Injection molding, Flow analysis and simulation, Melt flow, Finite control volume method

ENJEKSİYON KALIPLARINDAKİ AKIŞIN ANALİZİ, ERGİMİŞ PLASTİK AKIŞININ MATEMATİKSEL MODELLENMESİ İÇİN TEMEL DENKLEMLERİN TÜRETİLMESİ

ÖZET

Plastik enjeksiyon kalıplarında, kalıp boşluğu içerisinde ergimiş plastiklerin akışının matematiksel modellenmesi, akış burnu hareketlerinin tayini ve basınç, hız ve sıcaklık dağılımlarının belirlenmesi için kullanılan temel denklemler türetilmiştir. Literatürde farklı metotlarla türetilen fakat, çok anlaşılır olarak verilmeyen süreklilik, momentum ve enerji denklemleri daha detaylı bir şekilde elde edilmiş ve diferansiyel denklem çözüm metotlarının uygulandığı biçime getirilmiştir. Sonlu Kontrol Hacmi formülasyonu'na göre yapılan ayrıklaştırma işleminde Tam Implicit metodu ve Upwind metodu kullanılmıştır. Kalıp boşluğunun iki boyutlu olarak ele alındığı çalışmada, Phoenix programı ile yapılan çözümlemede, yoğunluğun değişimleri Boussinesq Yaklaşımı'na göre hesaplanmıştır. Plastik kalıp boşluğunu doldurması simüle edilmiştir. Ayrıca, Darc'y yöntemi kullanılarak katı katman tabakası tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Enjeksiyonla kalıplama, Akış analizi ve simülasyon, Ergimiş plastiğin akışı, Sonlu kontrol hacmi metodu

1. GİRİŞ

19. yüzyılın sonlarına doğru bulunan plastikler, özellikle 2. Dünya savaşından sonra daha da geliştirilmiş ve binlerce çeşidi ile endüstride ve günlük hayatımızda hızla artan bir şekilde kullanılır olmuştur. Fiziksel ve kimyasal özelliklerine göre üretim şeklinin belirlendiği plastik parça üretiminde, çeşitli üretim teknikleri (enjeksiyon, ekstrüzyon, şişirme vb.) geliştirilmiştir. Plastik parçaların yaklaşık % 33' ünün enjeksiyonla kalıplama tekniği ile üretildiği tespit edilmiştir (1-5). Bu kadar geniş üretim kapasitesine sahip olan enjeksiyonla kalıplama ile üretim konusunda bir çok araştırma yapılmıştır. Enjeksiyonla kalıplama tekniğinde üretilen parçanın kalitesi, geometrik yapısı ve boyut toleransları ve yüzey

1. INTRODUCTION

Plastic materials were discovered at the latest 19th century and especially after the 2nd World War, were developed and using of plastic parts in daily life and in industry are rapidly increasing. In plastic part production, the manufacturing types (injection moulding, extrusion, blown moulding, etc.) are depending on plastics' physical and chemical properties were developed. It is determined that about %33 of plastic parts are produced by injection moulding (1-5). A lot of researches have been executed focus on injection moulding method which have amount of these wide spread production capacities. The factors which are affected the quality, the geometrical structure, the dimensional tolerances and the surface quality of

kalitesine etki eden faktörler çeşitli araştırmalara konu olmuştur.

Termoplastik ürünlerin elde edilmesinde, en çok enjeksiyonla kalıplama tekniği kullanılmaktadır. Ham madenin tek bir işlemle istenilen şekilde kalıplanabilmesi ve bir çok durumda imal edilen ürün için ikinci bir işlem gerektirmemesi bu metodu seri üretim için oldukça avantajlı hale getirmektedir. Bu nedenle, oyuncak, otomobil parçaları, ev eşyaları, çeşitli elektronik parçaları vb. gibi günlük hayatta rastladığımız plastik ürünlerin bir çoğu enjeksiyonla kalıplama metodu ile üretilmektedir (1-3).

Enjeksiyonla kalıplama, ergimiş plastiğin kalıp boşluğuna enjekte edilmesi, kalıp boşluğuna dolan ergiyiğin katılarak kalıp boşluğunun şeklini alması işlemidir. Ergimiş plastik, enjeksiyon memesinden yolluğa, yolluktan dağıtıcılara ve giriş kanalı aracılığıyla kalıp boşluğuna akmaktadır. Kalıp boşluğuna akan plastik, ergimiş plastik sıcaklığına göre daha düşük sıcaklıkta olan kalıp yüzeylerine temas etmektedir. Enjekte edilen ergimiş plastiğin sıcaklığı kalıbın sıcaklığından daha yüksek olduğundan, akış sırasında yüzeylere temas eden plastik malzemeden kalıba doğru bir ısı akışı gerçekleşmektedir (1, 2, 5-10).

Özellikle, plastik malzeme, akış sırasında temas ettiği yüzeylerde katılarak ilerlemektedir. Bu nedenle yolluk, dağıtıcılar ve ince kesitli bölgelerde akış sırasında plastiğin aktığı kesit zamana ve kalıp sıcaklığına bağlı olarak daralma göstermektedir (1, 5, 6, 8-10).

Şekil 1' de kayma hızına göre kayma gerilmesi ve viskozite değişiminde ideal akış (Newtonian) ile plastiğin ideal olmayan (Non-Newtonian) akış davranışları grafik olarak görülmektedir. Enjekte edilen ergimiş plastik kalıp boşluğuna dolarken, ideal olmayan ve özdeş ısıya sahip olmayan (Non-Isothermal) formda akmaktadır (1, 5, 9, 10). Ergimiş plastiğin kalıp içerisindeki akışı sırasındaki ısı transferinden dolayı oluşan sıcaklık kaybıyla beraber, ergimiş plastiğin yoğunluğu da değişmektedir. Dolayısıyla, kayma gerilmesi ve kayma hızı da değişen bu akış tipinde, zamana bağlı olarak da akışı etkileyen bütün parametreler değişme göstermektedir (1, 2, 5, 9-11). Ergimiş plastiğin akış biçimi, hız dağılımı, basınç dağılımı ve sıcaklık dağılımı, kalıp boşluğunun dolma süresini ve ürünün eksiksiz ve kaliteli olmasını belirlemektedir.

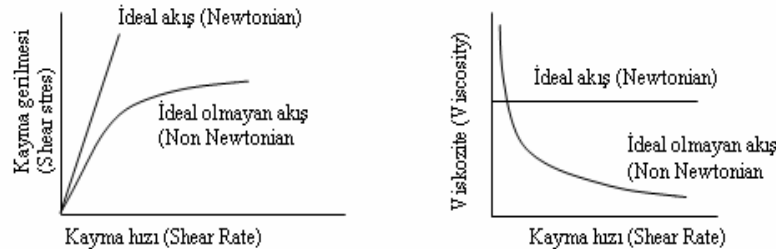


Figure 1. Changing of the shear rate versus the shear stress and the viscosity (1)

Şekil 1. Kayma oranının viskozite ve kayma gerilmesi ile değişimi (1)

Ürünün kalıplanması sırasında, akışı etkileyen parametreler iyi ayarlanmadığında, kalıp boşluğu tamamen dolmamaktadır (ürün eksik çıkmakta). Bunun yanında,

plastic parts have been becoming the subjects of the researches.

For producing the thermoplastic products, mostly injection moulding is used. Possibility of shaping of the plastic raw material with the one moulding cycle without requiring any other processing methods (turning, drilling, etc.) makes injection moulding method quite advantageous for serial production. For this reason, a lot of products such as the toys, the automobile parts, domestic parts and the various electronic parts and etc. are manufactured using injection moulding method (1-3).

Injection molding is process which molten plastic is injected into the mold cavity and to take shape of cavity after solidification. Molten plastic is flow through the nozzle, sprue, runner, gate and the mold cavity respectively. Molten plastic is in contact with the colder mold wall when the melt is flowing into the mold cavity. During the filling stage the heat flow from molten plastic to the wall occurs, because of the temperature gradient between the molten plastic and wall (1, 2, 5-10).

Particularly, molten plastic at mold-melt interface is advancing in solidified state. On account of that, during the filling stage of a mould cavity, in the sprue and in the runner and in thinner section areas, the cross section of molten plastic's flow way is to be restricted depending on the time and the mould temperature (1, 5, 6, 8-10).

In figure 1, for Newtonian and non-Newtonian flow behaviours, changing of the shear rate versus the shear stress and the viscosity are shown as a graph. In the filling stage, melt flows into the cavity in non-Newtonian and non-isothermal flow conditions (1, 5, 9-10). Due to the heat loss from melt to the mould cavity, at the same time the density of the melt is changed, too. Therefore, this causes the changes on all of the flow parameters which are dominant for unsteady flow behaviour (1, 2, 5, 9-10). Consequently, for suitable moulding conditions flow of molten plastic from injection nozzle to mould cavity is required very important researches and analysis. Flow behaviour of molten plastic, velocity, pressure and temperature distribution are determined filling time and to be completely and quality of plastic part.

During the filling stage, required parameters which are affected molten flow causes the unfilled cavity, if are not adjusted suitably. Nevertheless, melt is not reach into the

ergimiş plastik çok ince detaylara girememekte ve kaynak hattı oluşumu gibi ürünün estetik ve dayanım özelliklerini olumsuz etkileyen problemlerle karşılaşmaktadır.

Endüstriyel plastik ürünlerin enjeksiyonla üretilmesi aşamasında oluşabilecek bu olumsuz parametrelerin önceden belirlenmesi gerekmektedir. Bu nedenle, en uygun kalıp boşluğu, yolluk ve dağıtıcı kanalların tasarımı ve enjeksiyon basıncı, enjeksiyon sıcaklığı, enjeksiyon hızı, enjeksiyon süresi, tutma basınçları ve ütleme süresi gibi enjeksiyon parametrelerinin önceden belirlenebilmesi için ergimiş plastiğin kalıp boşluğundaki akış davranışının bilinmesi gerekmektedir. Ergimiş plastiğin akış davranışının simülasyonu için kullanılacak temel denklemler, birim kontrol hacmi elemanı üzerindeki değişimler dikkate alınarak çıkarılmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, ergimiş plastiklerin akışı ile ilgili temel denklemlerin detaylı olarak elde edilmesi, sayısal analizi ve dikdörtgen bir kalıp boşluğu içindeki akış simülasyonun yapılmasıdır.

2. TEMEL DENKLEMLER

2.1. Süreklilik Denklemi

Üç boyutlu bir uzayda akış bölgesi içerisinde bulunan ve yüzeyleri koordinat düzlemine paralel duran bir kontrol hacmi elemanı seçilmekte ve bu eleman üzerinde kütle korunumu kanunundan hareketle, süreklilik denklemi elde edilmektedir (11-20). Şekil 2' de akışkanın hızı x , y ve z doğrultusundaki bileşenleri sırasıyla u , v ve w ile gösterilirse,

$$M_{ix} = \rho u dy dz dt \quad (1)$$

benzer şekilde y ve z yönünde giren kütle,

$$M_{iy} = \rho v dx dz dt \quad (2)$$

$$M_{iz} = \rho w dx dy dt \quad (3)$$

olarak yazılır. Kontrol hacminden çıkan kütle ise;

thin section and other problems such as weld line formation, aesthetic of part and reducing mechanical properties are to come into existence.

During injection molding of industrial plastic part, it is necessary that existing negative parameters are determinate. For this reason, in the beginning for determining the injection parameters such as design of cavity, sprue, runner and injection pressure, velocity and temperature, packing time plastics' flow behaviour in the mold have to be known. Governing equations for simulation of molten plastics' can be obtained using variations on unit control volume.

The goal of this study is to obtain the governing equations for molten plastics' in detail and numerical analysis and flow simulation of molten plastic in rectangular mould cavity.

2. GOVERNING EQUATIONS

2.1. Continuity Equation

In a 3-D flow space a control volume element is chosen in flow area and on this part applying mass conservation law continuity equation is obtained. Where u , v and w are the velocity components of x , y and z cartesian coordinates and M_{ix} , M_{iy} and M_{iz} are the masses which are going into the control volume.

$$M_{ix} = \rho u dy dz dt \quad (1)$$

$$M_{iy} = \rho v dx dz dt \quad (2)$$

$$M_{iz} = \rho w dx dy dt \quad (3)$$

M_{ox} , M_{oy} and M_{oz} are the masses which are going out of the control volume and formulated as shown below:

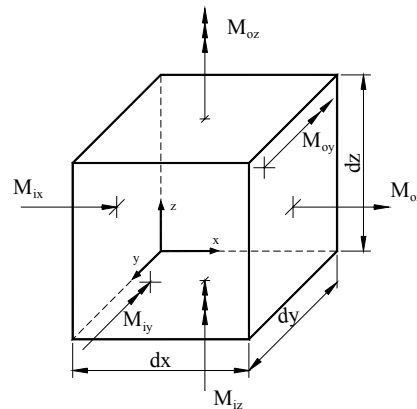


Figure 2. The going in and going out mass on a 3-D elemental control volume element

Şekil 2. Üç boyutlu elemaner bir kontrol hacmi elemanı üzerinde giren ve çıkan kütle kontrol hacmine x yönünden giren kütle

$$M_{ox} = \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy dz dt \quad (4) \quad M_{ox} = \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy dz dt \quad (4)$$

$$M_{oy} = \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dx dz dt \quad (5) \quad M_{oy} = \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dx dz dt \quad (5)$$

$$M_{oz} = \rho \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) dx dy dt \quad (6) \quad M_{oz} = \rho \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) dx dy dt \quad (6)$$

şeklinde ifade edilir. Kütlelerin korunumu prensibine göre kontrol hacmine giren kütle ile çıkan kütle birbirlerinden çıkarılırsa,

Conservation of the mass means that, the mass which is going into the control volume is equal to the mass which is going out of the control volume. Therefore, if the masses which are going into the control volume subtract from the masses which are going out of the control volume,

$$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + M_{ix} + M_{iy} + M_{iz} - M_{ox} - M_{oy} - M_{oz} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \rho u dy dz dt + \rho v dx dz dt + \rho w dx dy dt - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) dy dz dt$$

$$- \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) dx dz dt - \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx dy dt = 0 \quad (7)$$

eşitlik sadeleştirilirse;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx dy dz dt = 0 \quad (8) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx dy dz dt = 0 \quad (8)$$

eşitliği bulunur. Birim hacim ($dV=dx dy dz$) Eş. 8 yeniden yazılacak olursa;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (9) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

şekline dönüştür. Yoğunluğun zamana bağlı olarak değişmediği ($d\rho/dt=0$), sıkıştırılmaz akılar için süreklilik denklemi,

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad (10) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad (10)$$

şeklinde yazılır.

2.2. Momentum Denklemleri

Bir akışkan kütlelerinin x , y ve z yönlerindeki hareketini ele aldığımızda, hız bileşenleri u , v , w ile gösterilirse, taneciğin ivmesinin x , y ve z yönlerindeki bileşenleri;

$$x\text{- yönündeki bileşeni: } a_x = \frac{du}{dt} \quad (11)$$

$$y\text{- yönündeki bileşeni: } a_y = \frac{dv}{dt} \quad (12)$$

$$z\text{- yönündeki bileşeni: } a_z = \frac{dw}{dt} \quad (13)$$

olarak yazılır. u hızının zamana ve yere göre tam diferansiyeli alındığında,

can be obtained. And if the Equation 7 is simplified,

can be obtained. If the unit volume ($dV=dx dy dz$) is substituted in Equation 8,

can be obtained. For incompressible fluids, $d\rho/dt = 0$, hence

can be obtained for incompressible fluids.

2.2. Momentum Equation

Consider a moveable fluid particle; the components of acceleration in x , y and z directions can be formulated as;

$$x\text{- component of momentum: } a_x = \frac{du}{dt} \quad (11)$$

$$y\text{- component of momentum: } a_y = \frac{dv}{dt} \quad (12)$$

$$z\text{- component of momentum: } a_z = \frac{dw}{dt} \quad (13)$$

where, a_x , a_y and a_z are the acceleration components. du can be differentiated as shown below;

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (14)$$

eşitliği elde edilir. Bütün terimleri dt ile bölersek;

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (15)$$

yazılır. Burada, $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$ olduğundan u , v ve w Eşitlik 15' de yerlerine konursa;

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (16)$$

elde edilir. Benzer şekilde akışkan taneciğinin y ve z yönlerindeki ivmeleri de

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (17)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (18)$$

olarak yazılır.

Kontrol hacmi içerisinde birim zamanda geçen tüm tanecikler üzerine gelen x , y ve z yönlerindeki toplam basınç kuvveti yazılır ve sadeleştirmeler yapılırsa;

$$F_x = Pdydz - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx)dydz = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \quad (19)$$

$$F_y = Pdx dz - (P + \frac{\partial P}{\partial y} dy)dx dz = -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz \quad (20)$$

$$F_z = Pdy dx - (P + \frac{\partial P}{\partial z} dz)dy dx - \rho g dz dy dx \\ = -\frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz - \rho g dx dy dz \quad (21)$$

şeklinde yazılır. Kontrol hacminden birim zamanda geçen tanecikler üzerine gelen basınç kuvvetleri, Newton'un 2. kanununa göre taneciklerin tamamının atalet kuvveti ile dengelenecektir (12-15, 17- 20). Kütle = m , $m = \rho dx dy dz$ ve $\bar{F} = ma$ eşitliklerinde a_x , a_y ve a_z yerlerine yazılarak elde edilen denklemler yerlerine konulursa;

$$\bar{F}_x = ma_x = \rho dx dy dz (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}) \quad (22)$$

$$\bar{F}_y = ma_y = \rho dx dy dz (\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}) \quad (23)$$

$$\bar{F}_z = ma_z = \rho dx dy dz (\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}) \quad (24)$$

x , y ve z yönlerindeki atalet kuvvetleri yazılır. Kontrol hacmindeki akışkan tanecikleri üzerine x yönünde etki eden basınç kuvveti ile atalet kuvveti ($\bar{F}_x = F_x$) bir

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (14)$$

if all terms divide by dt ,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (15)$$

is obtained. Where, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dx}{dt} = w$. If these terms substitute in Eq. 15,

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (16)$$

can be obtained. Similarly,

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (17)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (18)$$

can be written.

Pressure forces which are affected on the fluid particle in x , y and z directions in the control volume are written and then arranged again,

$$F_x = Pdydz - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx)dydz = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \quad (19)$$

$$F_y = Pdx dz - (P + \frac{\partial P}{\partial y} dy)dx dz = -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz \quad (20)$$

$$F_z = Pdy dx - (P + \frac{\partial P}{\partial z} dz)dy dx - \rho g dz dy dx \\ = -\frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz - \rho g dx dy dz \quad (21)$$

are obtained. These pressure forces in control volume are equal to inertial forces according to Newton's 2nd Law (12-15, 17-20). If a_x , a_y and a_z equations substitute in $\bar{F} = ma$ ($m = \rho dx dy dz$) equation, the inertial forces in x , y and z directions,

$$\bar{F}_x = ma_x = \rho dx dy dz (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}) \quad (22)$$

$$\bar{F}_y = ma_y = \rho dx dy dz (\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}) \quad (23)$$

$$\bar{F}_z = ma_z = \rho dx dy dz (\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}) \quad (24)$$

can be obtained. Using and arranging the pressure force

birlerine eşitlenirse ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa x yönündeki momentum denklemi ;

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \quad (25)$$

bulunur. Aynı işlemler diğer yönler için de uygulanırsa;

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \quad (26)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \quad (27)$$

y ve z yönündeki momentum denklemleri elde edilir. Eşitlik 25, 26 ve 27'de verilen momentum denklemlerinde sürtünme terimleri bulunmamaktadır. Sürtünme terimleri de Kartezyen koordinatlardaki elementer bir hacim elemanı üzerinde ele alınır, x yönündeki toplam gerilmeler Şekil 3' deki gibi gösterilir.

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa x yönündeki toplam sürtünme kuvveti;

$$F'_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (28)$$

şeklinde yazılır.

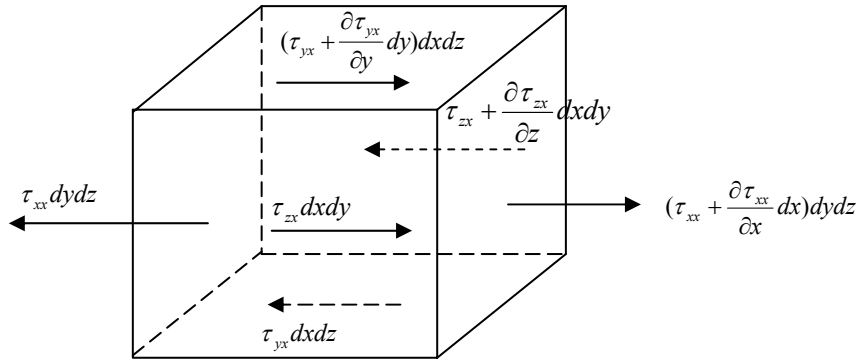


Figure 3. The stresses occur at x direction on an elemental control volume (14-16)

Şekil 3. Elementer bir kontrol hacmi üzerinde x yönünde oluşan gerilmeler (14-16)

$$\sum F'_x = \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx\right) dydz - \tau_{xx} dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{zx} dx dy$$

Benzer şekilde y ve z yönlerindeki sürtünme kuvvetleri,

$$F'_y = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (29)$$

$$F'_z = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (30)$$

şeklinde yazılır. Eş. 28, 29 ve 30'da verilen sürtünme kuvvetleri Eş. 25, 26 ve 27'de yerlerine yazılırsa,

and inertial force balance ($F'_x = \bar{F}'_x$), x component of momentum can be written as shown below.

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \quad (25)$$

Similarly, y and z components of momentum can be written as shown below.

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \quad (26)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \quad (27)$$

Eq. 25-27 don't include friction terms. If the friction terms are added into equations, the total stress forces (Fig. 3) can be written as shown below.

$$F'_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (28)$$

are written. If Eq. 28-30 substitute in Eq. 25-27,

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (31)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (32)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (33)$$

ifadeleri elde edilir. Sürtünme kuvvetinde bulunan gerilmeler hızlar cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir (14, 15).

$$\tau_{xx} = \mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\text{div}U\right) \quad (34)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (35)$$

$$\tau_{yy} = \mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\text{div}U\right) \quad (36)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (37)$$

$$\tau_{zz} = \mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\text{div}U\right) \quad (38)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (39)$$

$$\text{div}U = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (40)$$

Eş. 34-39'da hızlara bağlı olarak ifade edilen bu gerilme değerleri, Eş. 31, Eş. 32 ve Eş. 33'de yerlerine konur ve ara işlemler yapılarak düzenlenirse,

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (41)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (42)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (43)$$

hızlar cinsinden momentum denklemleri bulunmuş olur (13-17). Eşitlik 41'de verilen x-momentum, Eşitlik 42'de verilen y-momentum ve Eşitlik 43'de verilen z-momentum denklemleri kısaca;

$$\rho\frac{dU}{dt} = -\nabla P + \rho g + \mu\nabla^2 U \quad (44)$$

genel biçimde gösterilmektedir (13-23).

can be obtained. Stresses which are included in the friction forces can be written as shown below depending on the velocities (14, 15).

$$\tau_{xx} = \mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\text{div}U\right) \quad (34)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (35)$$

$$\tau_{yy} = \mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\text{div}U\right) \quad (36)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (37)$$

$$\tau_{zz} = \mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\text{div}U\right) \quad (38)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (39)$$

$$\text{div}U = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (40)$$

If Eq. 34-39, substitute in Eq. 31-32 and rearranged; the momentum equation depending on the velocities,

can be obtained (13-17). Eq. 41-43 can be written as a general expression like below (13-23).

$$\rho\frac{dU}{dt} = -\nabla P + \rho g + \mu\nabla^2 U \quad (44)$$

2.3. Enerji Denklemi

Bir akış alanındaki sıcaklık dağılımı enerji denklemleri ile ifade edilir. Bu enerji dengesi Termodinamiğin Birinci Kanununun bir elementer hacim elamanı için yazılmasıyla elde edilmektedir (12-18). Sisteme dışarıdan bir ısı veriliyor ve sistem tarafından iş üretiliyorsa, sistemde bir enerji değişimi olmaktadır (13-15).

$$Q-W=E \quad (45)$$

Burada Q , sisteme giren veya sistemden çıkan ısı olup, Q_i =iletim, Q_{kon} =taşıma ve Q_{rad} =radyasyon olmak üzere bileşenlere ayrılabilir. Yapılan iş (W) ise viskoz (W_v), basınç (W_b) ve yerçekimi ve elektromanyetik vb. diğer kuvvetler tarafından yapılan işleri göstermektedir.

2.3. Energy Equation

The temperature distribution in the flow area, are expressed by energy equation. The energy equation is the meaning of the first law of the Thermodynamics (12 – 18). If there is a heat flux from a heat source to the system and the system is produced a work with this heat flux, this means that, there is an energy change in the system (13 - 15).

$$Q-W=E \quad (45)$$

where, Q is a heat which is coming in or going out of the system, and can be divided in three components such as, Q_i = conduction, Q_{kon} = convection, Q_{rad} = radiation. If we consider W as a work, then W_v is represents the viscous work and W_b is represents the pressure work, gravitational work and electromagnetic work.

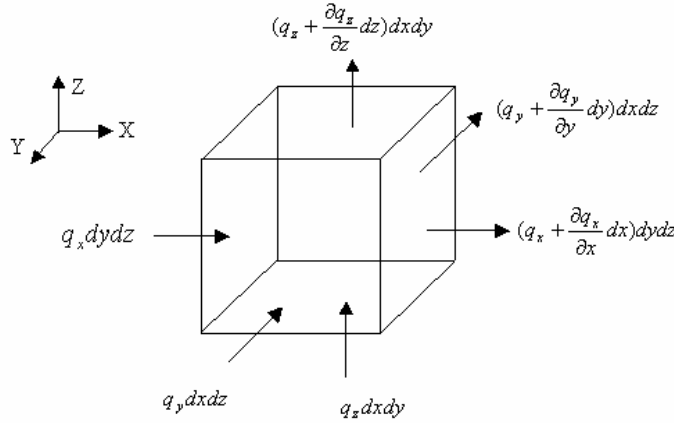


Figure 4. The energy balance at an elemental control volume (13-15)

Şekil 4. Elementer bir kontrol hacminde enerji dengesi (13-15)

Burada basınç ve viskoz kuvvetleri tarafından yapılan işe, yüzey kuvvetleri de denmektedir. Şekil 4'deki gösterildiği gibi birim hacim elemanına giren ve çıkan ısı dikkate alındığında, sisteme verilen ısı (+), alınan ısı ise (-) ile gösterilirse, bu durumda sistemdeki toplam enerji değişimi,

$$q = q_x dydz - (q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dydz + q_y dx dz - (q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy) dx dz + q_z dx dy - (q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz) dx dy$$

$$q = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial q_z}{\partial z} dx dy dz \quad (46)$$

olur. Birim hacim ($dV=dx dy dz$) için sistemdeki ısı değişimi,

$$q = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) \quad (47)$$

eşitliği elde edilmektedir. Diğer taraftan Fourier yasasına göre ısı akışı,

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (48)$$

W_v and W_b , is called the surface forces. As shown in Fig.4, using the heat flux balance (heat flux into the control volume (+), heat flux from the control volume (-)) the total energy change,

can be written. Heat change in the unit volume ($dV=dx dy dz$), can be obtained using the Eq. given below.

$$q = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) \quad (47)$$

Heat fluxes can be written as shown below using the Fourier Law,

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (48)$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (49)$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (50)$$

şeklinde yazılır ve q_x , q_y ve q_z değerleri Eş. 47’de yerlerine yazılırsa (k =sabit olmak üzere),

$$q = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = k \nabla^2 T \quad (51)$$

eşitliği elde edilmektedir. Yüzey gerilmeleri tarafından x -yönünde yapılan iş,

$$W_x = \tau_x U dA \quad (52)$$

olduğundan, yüzey gerilmeleri tarafından x -yönünde yapılan iş Şekil 5’te gösterilen sol ve sağ taraftaki yüzeyler üzerinde yapılan işlerin toplanmasıyla elde edilmektedir.

$$W_x = (u \sigma_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) dy dz - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz - \left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz \quad (53)$$

Burada σ_{xx} ’nin o yüzeye gelen basınç terimi ve bu yöndeki kayma gerilmesinin toplamı olduğu ($\sigma_{xx} = -P + \tau_{xx}$) bilindiğinden, yerine konur ve çarpım halindeki diferansiyel değerler (çok küçük olduğundan) ihmal edilirse x -yönündeki yapılan iş;

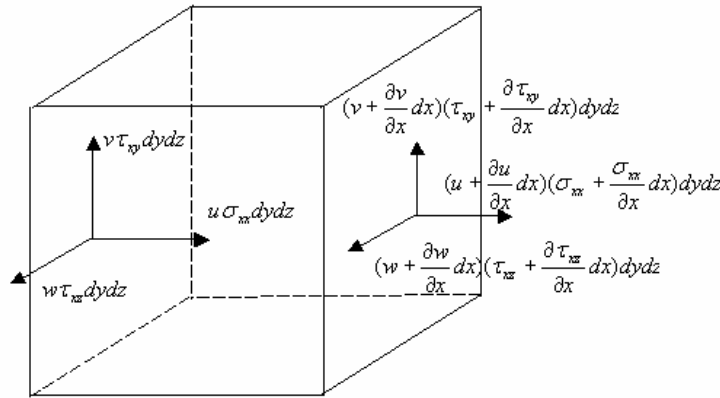


Figure 5. Algebraic total of the stress and the velocity at x direction on a control volume (13-15)
Şekil 5. Elementer bir kontrol hacminde x yönündeki gerilme ve hız değerlerinin cebirsel toplamı (13-15)

$$W_x = - \left(\frac{\partial u \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial w \tau_{xz}}{\partial x} \right) + \frac{\partial u P}{\partial x} \quad (54)$$

olarak bulunur. Aynı şekilde, y -yüzeylerinde yapılan iş;

$$W_y = - \left(\frac{\partial u \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial v \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial w \tau_{yz}}{\partial y} \right) + \frac{\partial v P}{\partial y} \quad (55)$$

z -yüzeylerinde yapılan iş;

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (49)$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (50)$$

Substituting the Eq. 48 - 50 in Eq.50 (k = constant),

$$q = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = k \nabla^2 T \quad (51)$$

is obtained. The total surface stresses in x direction, is obtained adding the works which are effected on the left and the right sides of control volume as shown in Fig. 5.

$$W_x = \tau_x U dA \quad (52)$$

olduğundan, yüzey gerilmeleri tarafından x -yönünde yapılan iş Şekil 5’te gösterilen sol ve sağ taraftaki yüzeyler üzerinde yapılan işlerin toplanmasıyla elde edilmektedir.

Burada σ_{xx} ’nin o yüzeye gelen basınç terimi ve bu yöndeki kayma gerilmesinin toplamı olduğu ($\sigma_{xx} = -P + \tau_{xx}$) bilindiğinden, yerine konur ve çarpım halindeki diferansiyel değerler (çok küçük olduğundan) ihmal edilirse x -yönündeki yapılan iş;

$$W_x = - \left(\frac{\partial u \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial w \tau_{xz}}{\partial x} \right) + \frac{\partial u P}{\partial x} \quad (54)$$

Similarly, the work on y surfaces,

$$W_y = - \left(\frac{\partial u \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial v \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial w \tau_{yz}}{\partial y} \right) + \frac{\partial v P}{\partial y} \quad (55)$$

and then, the work on z surfaces,

$$W_z = - \left(\frac{\partial u \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial v \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial w \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \frac{\partial w P}{\partial z} \quad (56)$$

$$W_z = -\left(\frac{\partial u \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial v \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial w \tau_{zz}}{\partial z}\right) + \frac{\partial w P}{\partial z} \quad (56)$$

olarak elde edilmektedir. Bu durumda x, y ve z yüzeylerinde yüzey gerilmeleri tarafından yapılan toplam iş;

$$W = W_x + W_y + W_z \quad (57)$$

şeklinde yazılır. Eş. 53, Eş. 54 ve Eş. 55'de verilen iş ve Eş. 50'de verilen ısı terimleri ile iç enerji terimleri Eşitlik 45'de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa birim hacim başına enerji değişimi;

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T - P \operatorname{div} U + \tau_{ij} \nabla U \quad (58)$$

elde edilir. Eşitlik 57'deki bazı terimleri incelersek;

$$C_v dT = C_p dT - R dT = C_p dT - d(P/\rho) \quad (59)$$

şeklinde yazılır. Eşitliğin her iki tarafı dt ile bölünürse,

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \rho \frac{d(P/\rho)}{dt} \quad (60)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\frac{d(P/\rho)}{dt}$ 'nin zamana göre türevi;

$$\frac{d(P/\rho)}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (61)$$

olarak yazılır. $d(P/\rho)$ 'nin Eş. 60'da verilen zamana göre türevi Eş. 58'de yerine yazıldığında,

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} - P \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \frac{dP}{dt} + P \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (62)$$

olduğu görülür. Eşitlik 10'da verilen süreklilik denklemi;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad \text{diğer bir ifade ile,}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} U \quad \text{olduğundan, Eş. 61'de yerine konursa,}$$

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \frac{dP}{dt} - P \operatorname{div} U \quad (63)$$

bağıntısı bulunur. Eşitlik 63 ile Eşitlik 58 birbirleri ile eşitlenir ve düzenlenirse,

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dP}{dt} + k \nabla^2 T + \tau_{ij} \nabla U \quad (64)$$

ifadesi elde edilir. Burada, yayılım enerjisi (dissipation energy) $\tau_{ij} \nabla U = \mu \phi$ olarak gösterildiğinde enerji denklemi,

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dP}{dt} + k \nabla^2 T + \mu \phi \quad (65)$$

olarak yazılır. Akış sırasında tabakalar arasındaki sürtünmeden dolayı meydana gelen ısıyı temsil eden yayılma sabiti ϕ değeri; momentum denklemlerinde ifade

are obtained. Here, the total work, that is made by surface stresses, on x, y and z surfaces is written as,

$$W = W_x + W_y + W_z \quad (57)$$

If Eq. 50, 53-55 substitute in Eq. 45, and required arrangements are done the energy change per unit volume is given by,

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T - P \operatorname{div} U + \tau_{ij} \nabla U \quad (58)$$

If we examine the some terms at Eq.58, it is written as,

$$C_v dT = C_p dT - R dT = C_p dT - d(P/\rho) \quad (59)$$

If the both side of Eq. 59 are divided by "dt" gives,

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \rho \frac{d(P/\rho)}{dt} \quad (60)$$

Here, derivative of $\frac{d(P/\rho)}{dt}$ in respect of time is written as,

$$\frac{d(P/\rho)}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (61)$$

Substituting the Eq. 60 in Eq. 58 gives,

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} - P \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \frac{dP}{dt} + P \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (62)$$

Substituting the Eq. 10 in Eq. 62 gives,

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \frac{dP}{dt} - P \operatorname{div} U \quad (63)$$

Equalizing the Eq. 63 to Eq. 58 and after the rearrangement we obtain,

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dP}{dt} + k \nabla^2 T + \tau_{ij} \nabla U \quad (64)$$

Here, showing the dissipation energy as $\tau_{ij} \nabla U = \mu \phi$, the Energy Equation is written as,

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dP}{dt} + k \nabla^2 T + \mu \phi \quad (65)$$

Dissipation energy ϕ which represents the heat that occurs due to the friction between the fluid layers, can be obtained from stress expressions used in momentum equation (5, 12). Writing the stress expressions as the velocity expressions gives,

edilen gerilmelerden elde edilebilmektedir (5, 12). Gerilme değerleri ara işlemler yapılarak hızlar cinsinden;

$$\phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]^2 \quad (66)$$

şeklinde yazılır ve buna bağlı olarak enerji denklemi en genel şekliyle düzenlenirse,

$$\rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} + w \frac{\partial P}{\partial z} \right) + k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \phi \quad (67)$$

eşitliği elde edilir.

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Ergimiş plastiklerin akış davranışının incelenmesi ve simülasyonu için kullanılan Navier-Stokes denklemleri ve enerji denklemini sayısal olarak çözmek için, Sonlu Kontrol Hacmi Yöntemi kullanılmıştır. Temel denklemler, Şekil 6.a' da verilen ana kontrol hacminde Tam Implicit Metodu kullanılarak integre edilip, ayrıştırılmıştır. Diferansiyel denklemlerdeki konveksiyon ve difüzyon terimleri, Upwind yöntemine göre ayrıştırılmıştır.

3. SOLUTION METHOD

In order to solve the Navier-Stokes Equations and The Energy Equation which are used for study the molten plastic' s flow behaviour and simulation numerically, Finite Control Method was used. Governing equations were discretized in the control volume (Figure 6 – a) using Full Implicit method. And the diffusion and the convection terms in the differential equations, were discretized using Upwind scheme.

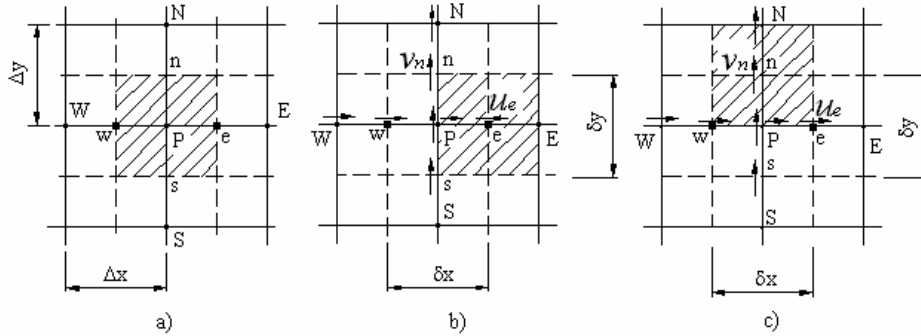


Figure 6. The control volume on which differential equation integrated. a) Main control volume, b) Staggered grid at x direction, c) Staggered grid at y direction

Şekil 6. Diferansiyel denklemlerin integre edildiği kontrol hacmi. a) Ana kontrol hacmi, b) x yönünde kaydırılmış ızgara, c) y yönünde kaydırılmış ızgara

Kaydırılmış ızgara sistemi kullanılarak, basınç ve sıcaklık gibi skaler değişkenler ana düğüm noktalarına, vektörel bir büyüklük olan hız ise kaydırılmış düğüm noktalarında depolanarak hesaplanmıştır. Basınç terimini veren bir denklem bulunmadığından, SIMPLE algoritması kullanılarak, süreklilik denklemi basınç denklemine dönüştürülmüştür (14,21-24).

Süreklilik, momentum ve enerjisi denklemlerini konservatif formda yazıp tek denklem haline getirildiğinde,

$$\frac{\partial}{\partial x} (U\phi) + \frac{\partial}{\partial y} (V\phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S \quad (68)$$

şeklinde yazılır. Burada, Γ ve S sırasıyla difüzyon katsayısı ve kaynak terimi olup, genel değişken ϕ ' nin alacağı anlama göre değerler alır (14,21-23). Eşitlik 68, kontrol hacminde integre edildiğinde,

For the discretization, the staggered grid system was used. The scalar variables such as the pressure and the temperature were calculated at main nodes and the vectorial variable velocity was calculated at staggered nodes. For calculating the pressure field, there is not any equation. Because of this reason, the Continuity equation was transformed to the pressure equation using SIMPLE algorithm (14, 21-24).

The Continuity, the Momentum and the Energy equations can be expressed in a single equation as a conservative form as

$$\frac{\partial}{\partial x} (U\phi) + \frac{\partial}{\partial y} (V\phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S \quad (68)$$

Here, Γ and S are the diffusion coefficient and the source term respectively and their values are changed according to general variable ϕ . If the Eq. 68 is integrated in the CV, the discretization equation can be

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (69)$$

şeklinde cebirsel formda yazılır (23,24).

Analizi yapılan Şekil 7' de ki düzgün dikdörtgen şeklindeki kalıp boşluğuna ergimiş plastiğin dolması, akışkanın hızı ve sıcaklık dağılımları incelenmiştir. Phoenics 3.4 programı kullanılarak yapılan sayısal analizde, hesaplamalar Pektim ürünü olan I-668 kodlu Yüksek Yoğunluklu Polietilen (YYPE) malzemesi için yapılmıştır. Ayrıca, ideal olmayan akış özelliği gösteren plastiğin viskozitesini hesaplamak için literatürde çok yaygın olarak kullanılan Power-Law viskozite modeli kullanılmıştır. Sınır şartları olarak,

$T_w = 40^\circ \text{C}$,	Kalıp sıcaklığı
$T_{inj} = 220^\circ \text{C}$,	Enjeksiyon sıcaklığı
$V_{inj} = 0,25 \text{ m/s}$,	Giriş hızı
$P_{inj} = 50 \text{ MPa}$,	Giriş basıncı

olarak alınmıştır.

written as,

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (69)$$

In this paper, filling analysis, velocity and the temperature distribution of molten polymer during the filling stage of a rectangular shaped mould cavity as shown in Fig. 7, was analysed. For the numerical analysis of molten high density polyethylene (I-668 supplied by Petkim) PHOENICS 3.4 general purpose CFD code was used. Furthermore, Power-Law viscosity model was used calculation of the melt viscosity. The boundary conditions used in the analysis were,

$T_w = 40^\circ \text{C}$,	at mould wall
$T_{inj} = 220^\circ \text{C}$,	at mould gate
$V_{inj} = 0,25 \text{ m/s}$,	at mould gate
$P_{inj} = 50 \text{ MPa}$,	at mould gate

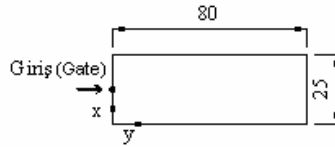


Figure 7. The geometry of the mould cavity at which flow analysis and simulation are made
Şekil 7. Akış analizi ve simülasyonu yapılan kalıp boşluğu geometrisi

Plastik ile kalıp boşluğundaki hava arasında keskin bir yoğunluk farkı olduğundan, iki farklı yoğunluk ara yüzeyinin tespiti için Van Leer metodu kullanılmıştır. Gauss-Jordan eliminasyon metodu kullanılarak yapılan hesaplama sonucunda, elde edilen değerlere göre boşluktaki yoğunluk değişimine bağlı olarak akış simülasyonu yapılmıştır. Yoğunluğun değişimi için Boussinesq metodu kullanılmış olup, yoğunluğun sıcaklıkla değişimi dikkate alınmıştır. Ayrıca, akış analizi yapılan YYPE malzemesinin camsı geçiş sıcaklığı 137°C olarak alınmıştır. Camsı geçiş sıcaklığının altındaki sıcaklıklarda plastik malzeme, katı fazda olduğu için, sıcaklığın bu değerin altına düştüğü bölgelerde katılaşmış bir katman tabakası oluşturmaktadır. Yaptığımız analizde, Darc'y katılık oranı kullanılarak ergime sıcaklığı ile camsı geçiş sıcaklığı arasındaki sıcaklıklar 10 eşit parçaya bölünmüştür. Daha sonra her bir bölüntü için 0 ila 1 arasında katsayı atanarak katılık oranı belirlenmektedir. Camsı geçiş sıcaklığının altındaki sıcaklığa sahip bölgeler tam katı, ergime sıcaklığının üstündeki bölgeler de tamamen sıvı olarak değerlendirilmektedir. Sıcaklık değerleri enerji denklemi çözülerek elde edilmiştir. Şekil 8' de görüldüğü gibi, dikdörtgen şeklindeki kalıp boşluğunun ergimiş plastiğin kalıp boşluğunu doldurma tipini veren simülasyon görüntüleri elde edilmiştir.

Because of sharp density interface between plastic melt and air in the cavity, for describing the interface of the melt-air, Van-Leer method was used. Flow was simulated according to density variation in the cavity with the obtained values by Gauss-Jordan elimination method. The variation of the density depending on the temperature was calculated using Boussinesq method. In addition, for HDPE materials glass transition temperature value 137°C is used. Because the molten plastic under the glass transition temperature is behaved like a solid phase, under the glass transition temperature zone a solidified layer occurs. In the achieved analysis, using the Darcy's solidification ratio the melting temperature between melt and glass transition is divided into 10 equal point. And then, the values between 0 and 1 are apppoint to the each of the divisions for determining the solidification ratio. Thus, under the glass transition temperature zones are evaluated as a completely solid and the others are evaluated as a completely liquid. The temperature datas are obtained from solution of the Energy equation. And the flow behaviour of the molten plastic in rectangular shaped mould cavity was obtained as shown in Fig. 8.

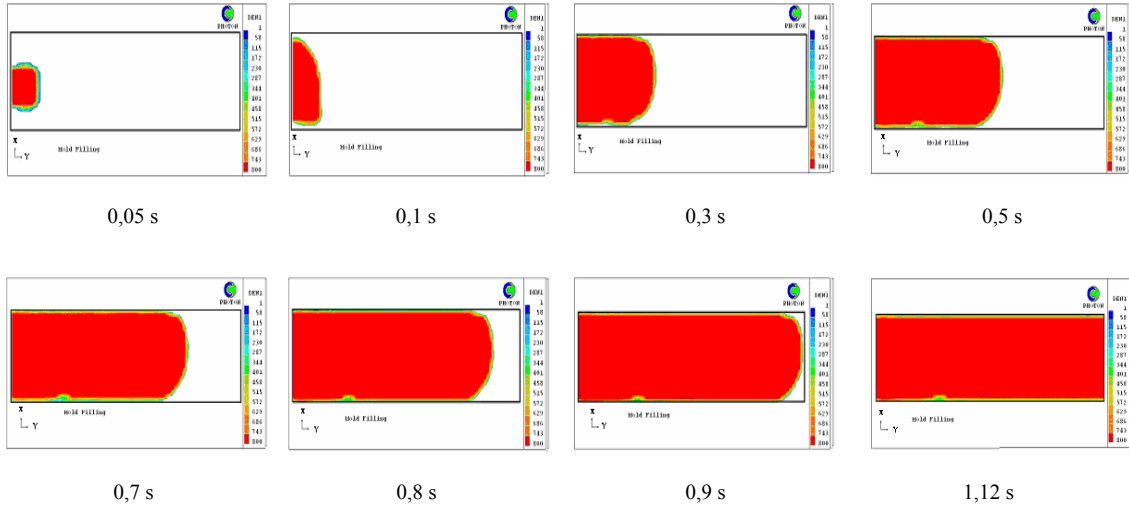


Figure 8. The filling of molten plastic in mould cavity
Şekil 8. Ergimiş plastiğin kalıp boşluğuna dolması

Şekil 8’ de görüldüğü gibi, giriş bölgesinde 0,05’ inci saniyede yaklaşık 12 mm uzunluğunda fiskiye akış olarak adlandırılan akış tipi gerçekleşmiştir. 0,1’ inci saniyede ergimiş plastik kalıp yüzeylerine doğru yönelmiş, daha sonra sürekli beslenen plastiğin basıncı ile kalıp boşluğu dolduğu tespit edilmiştir. Ergimiş plastiğin kalıp yüzeylerine temas ettiği yerlerde ve akış burunda katılmış katman olduğu belirlenmiştir.

4. SONUÇ

- Yapılan bu çalışma ile, bir çok kaynakta var olan, çeşitli ve karmaşık yöntemlerle türetilen temel denklemler en basit ve anlaşılır bir şekilde sunulmuştur.
- Akışkanların dinamik davranışlarını belirlemede ve basınç, hız, sıcaklık gibi akışın özelliklerini belirleyen parametrelerin hesaplanabilmesi için elde edilen lineer olmayan Navier-Stokes denklemleri sayısal olarak çözümlenmiştir. Phoenix 3.4 programı kullanılarak yapılan analizde temel denklemler, iki boyutlu olarak incelediğimiz Şekil 4’ deki kontrol hacmi için Sonlu Kontrol Hacmi yöntemine göre cebirsel hale getirilmiş ve Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi ile çözümlenmiştir.
- Tam Implicit metodunun kullanıldığı çözümlemede, diferansiyel denklemlerdeki konveksiyon ve difüzyon terimleri Upwind metoduna göre ayrıştırma yapılmıştır.
- Sıkıştırılabilir akış olarak çözümlenen denklemlerde yoğunluğun değişimi, Boussinesq metoduna göre yapılmış olup, yoğunluk sadece sıcaklık değişimine bağlı olarak hesaplanmıştır.
- Kalıp boşluğuna dolan ergimiş plastik, kalıp yüzeylerine temas ettiği anda ısı transferinden dolayı sıcaklığını kaybetmektedir. Darc’y yöntemi kullanılarak katılık oranı tespit edilerek, camsı geçiş sıcaklığının altına düşen bölgelerdeki katı katman tabakası oluşumu belirlenmiştir.

As shown in the Fig. 8, at 0.05th second of the filling stage fountain flow was occurred. At 0.1th second the flow front of the melt was oriented towards to the mould walls. It is determined that, at the mould-melt interface and at the melt front-air interface a thin solid layers (simulated in green colour) were occurred.

4. CONCLUSION

- In this paper, the governing equations derived more simple and clearly than the other references.
- Non-Linear Navier-Stokes equations were numerically solute. The governing equations were discretized using Finite Control Volume method and numerically analysed using the Gauss-Jordan elimination method.
- Solutions were done according to full implicit method. For the convection and the diffusion terms discretization were done according to upwind scheme.
- In this paper, the melt considered as a compressible fluid. The density variations were determined using the Boussinesq method and the density considered as an only temperature dependent variable.
- Using the Darcy’ s solidification ratio, a thin solid layers were determined at the mould-melt and at the melt front-air interfaces.
- Analysis obtained using Navier-Stokes equations and the time dependent (unsteady) flow behaviour of the melt in the mould cavity.

- Navier-Stokes denklemleri kullanılarak yapılan analizde, ergimiş plastiğin zamana bağlı olarak kalıp boşluğunu doldurma tipi belirlenmiştir.

5. TEŞEKKÜR

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yürütülmekte olan “Plastik Enjeksiyon Kalıplarında Erimiş Plastik Akışının Matematiksel Modellenmesi ve Deneysel Olarak İncelenmesi” adlı Doktora çalışması, 07/01-22 kodlu proje ile Gazi Ün. B.A.P. ve 2002K120250-15 kodlu proje ile de DPT tarafından desteklenmektedir. Projeye verdikleri destekten dolayı Gazi Ün. Bilimsel Araştırma Projeleri ve DPT’ ye teşekkür ederiz

Semboller

a : ivme	m/s²
C : Isınma ısısı	J/kg K
g : Yer çekimi ivmesi	m/s²
m : Kütle	kg
P : Basınç	N/m²
q : Isı akısı	W/m²
u : Hızın x bileşeni	m/s
U : Mutlak hız	m/s
v : Hızın y bileşeni	m/s
w : Hızın z bileşeni	m/s
W : İş	Joule, Nm
τ : Kesme gerilmesi	N/m²
φ : Genel değişken	

5. ACKNOWLEDGEMENT

The authors are very pleased to acknowledge supports by DPT State Planning Organization (Project number 2002K120250) and Gazi University Department of Scientific Research Project (Project number 07/01-22).

Nomenclature

a : acceleration	m/s²
C : Specific heat	J/kg K
g : Gravity acceleration	m/s²
m : mass	kg
P : pressure	N/m²
q : Heat flux	W/m²
u : x - component of velocity	m/s
U : Absolute velocity	m/s
v : y - component of velocity	m/s
w : z - component of velocity	m/s
W : work	Joule, Nm
τ : Shear stress	N/m²
φ : General variable	

KAYNAKLAR/ REFERENCES

1. Rosato, D. V., Rosato, D. V., *Injection Molding Handbook 2nd ed.*, **Kluwer Academic Publishers**, Boston/London (1999).
2. Buckleitner, E. V., *Plastics Mold Engineering Handbook 5th ed.*, **Chapman & Hall**, An International Thomson Publishing Company, USA (1995).
3. Miles, D.C., Briston, J.H., *Polymer Technology 3rd Ed.*, **Chemical Publishing Co. Inc.**, New York, USA (1996).
4. Rees H., *Mold Engineering*, **Hanser/Gardner Inc.**, Cincinnati, USA (1995).
5. Subbiah, S., Trafford, D. L., Güçeri, S. I., “Non- Isothermal Flow of Polymers Into Two -Dimensional, Thin Cavity Molds: A Numerical Grid Generation Approach”, *International Journal Heat Mass Transfer*, 32 (3), 415-434 (1989).
6. Seow, L. W., Lam, Y. C., “Optimising Flow in Plastic Injection Molding”, *Journal of Materials Processing Technology*, 72: 333-341 (1997).
7. Smith, D. E., Tortorelli, D. A., Tucker III, C. L., “Analysis and Sensivity Analysis For Polymer Injection and Compression Molding”, *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, 167: 325-344 (1998).
8. Hill, D., “Further Studies of The Injection Moulding Process”, *Applied Mathematics Modelling*, 20: 719-720 (1996).
9. Shen, Y. K., “Study on Moving Boundary Problems of Injection Molding”, *International Communicate Heat Mass Transfer*, 25: 701-710 (1998).
10. Chiang, H. H., Hieber, C. A., Wang, K. K., “A Unified Simulation of The Filling and Postfilling Stages in Injection Molding. Part I: Formulation”, *Polymer Engineering and Science*, 31 (2): 116-124 (1991).
11. Carreau, P.J., Kee, D., Chhabra, R.P., *Rheology of Polymeric Systems Principle and Applications*, **Hanser/Gardner Inc.**, Cincinnati, USA (1997).
12. White, F.M., *Fluid Mechanics 4th ed.*, **McGraw-Hill, Inc.**, New York, USA (1994).
13. Umur, H., *Akışkanlar Mekaniği*, **Alfa Basım Yayın Dağıtım**, İstanbul (1998).

14. Wendt, J.F., *Computational Fluid Dynamics an Introduction 2nd ed.*, **Springer**, Berlin, Germany (1996).
15. Versteeg, H.K., Malalasekera, W., "An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method", Addison Wesley Longman, England (1995).
16. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, **McGraw-Hill**, 17th ed., USA (1979).
17. Welty, J.R., Wicks, C. E., Wilson, R.E., *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer 3rd ed.*, **John Wiley & Sons Inc.**, USA (1984).
18. Yaman, G., İren, M., "İnce Kesitli Bir Kanal İçerisindeki Akımın İncelenmesi İçin -Boyutlu Formülasyon", **Makina Tasarım ve İmalat Dergisi**, 4 (2): 78-88 (2001)
19. Pozrikidis, C., *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **Oxford University Press** (1997)
20. Street, R.L., Watters, G.Z., Vennard, J.K., *Elementary Fluid Mechanics 7th ed.*, **John Wiley & Sons Inc.**, USA (1996)
21. Leal, L.G., "Laminar Flow and Convective Transport Processes: Scaling Principles and Asymptotic Analysis", Butterworth-Heinemann In Chemical Engineering, Stoneham, Ma, USA (1992)
22. Crochet, M.J., Davides, A.R., Walters, K., *Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow 3. Ed.*, **Elsevier** Rheology Series 1, Amsterdam, Netherlands (1991)
23. Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, **Hemisphere Published Corporation**, New York, USA (1980)
24. Versteeg, H.K., Malalasekera, W., *An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method*, **Longman**, England (1995)

Received/ Geliş Tarihi: 10.04.2002 Accepted/Kabul Tarihi: 19.11.2003