# KOMŞULUK VE YIĞILMA NOKTASI KAVRAMLARININ DİNAMİK MATEMATİK ORTAMINDA KEŞFEDİLMESİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

# A RESEARCH ON EXPLORING THE CONCEPTS OF NEIGHBOURHOOD AND ACCUMULATION POINT IN A DYNAMIC MATHEMATICS ENVIRONMENT

Yılmaz ZENGİN[1]

Başvuru Tarihi: 23.03.2017 Yayına Kabul Tarihi: 17.07.2017 DOI: 10.21764/efd.17728

**Özet:** Bu çalışmanın amacı, komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının dinamik matematik ortamında keşfedilmesini öğretmen adaylarının görüşleri doğrultusunda incelemektir. Bu amaçla gerçekleştirilen çalışmada, nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Çalışmanın katılımcılarını ise, toplam 15 matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Araştırma kapsamında gerçekleştirilen uygulamalarda, toplam 10 ders saati boyunca komşuluk, yığılma noktası ve limit tanımı GeoGebra yazılımıyla dinamik bir öğrenme ortamında ele alınmıştır. Veri toplama aracı olarak, uygulama öncesinde ve sonrasında kullanılan açık uçlu sorulardan oluşan iki adet görüş ve bilgi formu kullanılmıştır. Uygulamalardan sonra, öğretmen adaylarının komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını doğru tanımlayabildikleri ve kavramlar arasında ilişki kurabildikleri belirlenmiştir. Ayrıca, komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının dinamik bir ortamda inşa edilerek öğrenilmesi ve uygulama fırsatının oluşması, kalıcı ve kavramsal bir öğrenmenin gerçekleşmesine katkı sağladığı belirlenmiştir. GeoGebra yazılımının komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının keşfedilmesinde faydalı bir araç olarak kullanılabileceği de, araştırma kapsamında açıklanmıştır.

Anahtar Sözcükler: *Komşuluk, yığılma noktası, dinamik öğrenme ortamı, GeoGebra.*

**Abstract:**The purpose of this study was to investigate the concepts of neighbourhood and accumulation point in a dynamic mathematics environment among pre-service teachers. For this purpose, the qualitative research approach was adopted. The participants of the study were 15 pre-service mathematics teachers. The concepts of neighbourhood, accumulation point and the definition of limit were studied for 10 course hours in a dynamic learning environment with GeoGebra. The participants were given two open-ended questionnaires to find out about their views and knowledge about the concepts of neighbourhood and accumulation point, before and after the intervention. After the implementation, it was found that not only the pre-service teachers defined the concepts of neighbourhood and accumulation point correctly but also made connections between the concepts. In addition, it was determined that permanent and conceptual learning was achieved by both constructing the concepts of neighbourhood and accumulation point in a dynamic environment. It was found that GeoGebra software was a useful tool to explore the concepts of neighbourhood and accumulation point.

Key words: *Neighbourhood, accumulation point, dynamic learning environment, GeoGebra.*

## Giriş

Analiz bütün öğrenciler için zorluk düzeyi yüksek derslerden biri olarak görülmektedir (Robert ve Speer, 2001). Limit, türev ve integral gibi analizin temel kavramları öğrencilerin anlamakta ve öğretmenlerin de bu kavramları sınıfta yapılandırmada zorluk yaşadıkları bilinmektedir. Özellikle öğrencilerin zorluk yaşadığı matematiksel analizin önemli

[1] Yrd. Doç. Dr., Dicle Üniversitesi, Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, Diyarbakır

kavramlarından biri olan limit, analiz kavramları arasında merkezi bir pozisyonda bulunmakta ve yaklaşım teorisi, süreklilik, türev ve integral gibi kavramların temelini oluşturmaktadır (Cornu, 1991). Limit kavramı tam olarak öğrenilmediğinde süreklilik, yakınsaklık ve türev gibi konuların anlaşılması zor olabilmekte ve diğer analiz derslerinde hazır bulunuşluk düzeyini olumsuz yönde etkileyebilmektedir (Liang, 2016).

Kavram yanılgılarının ve öğrenme güçlüklerinin yoğun bir şekilde yaşandığı limit kavramının tanımlanmasında öğrencilerin sahip olduğu bilgilerin eksik ve zayıf olduğu görülmektedir (Tall ve Vinner, 1981). Özellikle de, limit tanımının sahip olduğu kendine özgü zenginlik ve bilişsel açıdan karmaşıklık bu zorluğun yaşanmasına neden olmaktadır (Cornu, 1991). Limitin formal tanımına bakıldığında; "$A \subset R$ olmak üzere $f : A \to R$ fonksiyonu ve $L \in R$ sayısı verilsin. $a \in R$ , $A$ nın bir yığılma noktası ve $a$ nın delinmiş bir komşuluğu $A$ nın alt kümesi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - a| < \delta$ iken $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $x$, $a$ ya yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti $L$ dir denir ve bu durum kısaca $\lim_{x \to a} f(x) = L$ olarak yazılır" (Kadıoğlu ve Kamali, 2011) tanımda delik komşuluk ve yığılma noktası kavramları dikkati çekmektedir. Öğrencilerin limit kavramına ait öğrenme güçlüklerinin ve kavram yanılgılarının altında yatan nedenlerden birçoğunun yığılma noktası kavramıyla ilişkili olduğu ve dolayısıyla da limitle ilgili bu güçlük ve yanılgıların üstesinden gelmek için yığılma noktası kavramının öğrenimi ve öğretiminin göz ardı edilmemesi gerektiği belirlenmiştir (Çetin, Dane ve Bekdemir, 2012). Limit kavramı için önemli bir yer tutan yığılma noktasının tanımında; "$A \subset R$ ve $a \in R$ olsun. Eğer $a$ nın her delinmiş komşuluğu $A$ kümesinin en az bir elemanını ihtiva ediyorsa $a \in R$ ye $A$ kümesinin yığılma noktası denir" (Kadıoğlu ve Kamali, 2011) delik komşuluk kavramı dikkati çekmektedir. Komşuluk ve delik komşuluk kavramları limit tanımı için önemli kavramlar olup öğrencilerin karışıklık yaşadıkları kavramlar arasında yer almaktadır (Baş, Çakmak, Işık ve Bekdemir, 2015). Komşuluk kavramı ve limitin formal tanımındaki $0 < |x - a| < \delta$ eşitsizlik arasındaki ilişkinin kurulması (Kabael, Barak ve Özdaş, 2015) limit kavramının tanımının daha iyi anlaşılmasını sağlamaktadır. Komşuluk kavramı ve yığılma noktası gibi limitin tanımında anahtar rolü üstlenen kavramlar da öğrenciler tarafından iyi anlaşılmadığı takdirde limit tanımı ezberlenmesi gereken soyut bir bilgi olarak düşünülmektedir. Nitekim çoğu öğrenci bir fonksiyonun bir noktada tanımlı iken o noktadaki değerin limit değerine eşit olduğunu ve tanımlı olduğu noktadaki değer bulma işlemini limit olarak algılamaktadır (Baki, 2008). Limit kavramsal olarak öğrenilmediğinde

$\lim_{x \to -2} \sqrt{x}$ limiti için $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $x = -2$ için tanımlı olmadığından limiti yoktur şeklinde ifade edilmektedir. Oysaki bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olmasına gerek yoktur (Kadıoğlu ve Kamali, 2011). Bir fonksiyonun *a* noktasındaki limiti, fonksiyonun bu noktada tanımlı olup olmamasına bağlı değildir. Limit ile amaçlanan bu delik civarda fonksiyonun davranışını incelemektir (Bayraktar, 2007). Öğrencilerin yığılma noktası kavramının formal tanımını anlamada (Engelbrecht, 2010), bu kavramı tanımlamak için gerekli olan kavramları bilmede ve yığılma noktasını ilişkili kavramlarla kullanmada zorluklar yaşamaları (Çetin, Dane ve Bekdemir, 2012) limit tanımını kavramsal olarak öğrenmelerini güçleştirmektedir. Bu nedenle, yığılma noktası ve komşuluk gibi limit kavramının tanımlanmasında önemli bir yer teşkil eden kavramların analiz derslerinde hangi araçlar yardımıyla nasıl ele alınacağı önem arz etmektedir.

Öğrencilerin çoğu limit tanımını uygularken limit alınan noktanın yığılma noktası olması gerektiğini unutmaktadır (Przenioslo, 2004). Bu kavramın öğrencilerde kalıcı ve kavramsal olarak öğrenilmemesi sadece limitin değil dizilerde limitin anlaşılmasını da olumsuz yönde etkileyebilir. Bununla birlikte, komşuluk kavramının da öğrenciler tarafından limit ve dizilerde limitin tanımının yapılandırılmasında tam olarak anlaşılmadığı belirlenmiştir (Przenioslo, 2003). Dizilerde de limit araştırılırken, komşuluk ve yığılma noktası kavramları öğrencilerin karşısına çıkmaktadır. Dizilerde limit incelenirken limit alınmak istenen noktanın dizilerin tanım kümesinin yığılma noktası olması gerekmektedir (Mamona-Downs, 2010). Hiçbir reel sayı, pozitif tam sayılar kümesinin yığılma noktası olmadığından $a \in R$ olmak üzere $f(n) = a_n$ kuralı ile verilen dizinin $\lim_{n \to a} f(n)$ limitinden bahsedilemez. $a \in R$ pozitif tam sayıların bir yığılma noktası olmadığından sadece $n \to \infty$ durumunda dizilerin limiti incelenmektedir (Kadıoğlu ve Kamali, 2011). Komşuluk ve yığılma noktası kavramları iyi bir şekilde anlaşılmadığında, bu durum sadece limit tanımının yapılandırılmasını değil aynı zamanda dizilerde limit kavramının da öğrenilmesini olumsuz yönde etkileyeceği görülmektedir. Bu nedenle, analiz derslerinde önemli bir yer teşkil eden limit ve dizilerde limit gibi kavramların anlaşılmasında temel rol üstlenen komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının öğrenme ortamında kavramsal olarak nasıl yapılandırılması gerektiğiyle ilgili alternatif yollar analiz derslerine katkı sağlayabilir. Analiz derslerinde matematiksel fikirlerin görselleştirilmesiyle öğrenciler kavramlarla ilgili daha güçlü sezgilere sahip olabilmektedir. Etkin yazılımların da analiz öğretiminde kullanılması öğrencilere matematiksel kavramları ilgi çekici bir ortamda keşfederek öğrenmelerine katkı sağlamaktadır (Tall, 1991). Yazılımların sağladığı dinamik görseller analiz öğretiminde matematiksel deneyleri, sembolik ve grafiksel temsiller arasında bağlantıları, temel kavramlar ve varsayımlar hakkında tartışmayı desteklemektedir (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis ve Lavicza, 2008). Analiz kavramlarının sahip olduğu dinamik doğası dikkate alındığında bu kavramların dinamik metotlarla incelenmesi öğrencilerin sezgisel hislerinin gelişimine ve görsel matematiksel süreçlerin oluşumuna yardımcı olmaktadır (Dikovic, 2009a). Analiz öğretiminde sezgi ve teori arasındaki boşluk dikkate alındığında dinamik yazılımlardan biri olan GeoGebra'nın bu boşluğu gidermede bir köprü görevi üstlendiği belirlenmiştir (Little, 2011). GeoGebra yazılımının analiz kavramlarını dinamik ortama taşımada önemli bir potansiyeli olduğu bilinmektedir (Hohenwarter ve diğ., 2008; Dikovic, 2009a).

Anlamlı bir matematiksel öğrenme için kullanma ve anlama arasında bir keşif süreci gereklidir. Matematiksel kavramlar kullanıldıkça başka kavramlarla olan ilişkisi ve uygulaması keşfedilmektedir. Böylece, kavramlar daha iyi anlaşılmakta ve başka kavramların yapılandırılması için kolaylıkla kullanılabilmektedir. Bu nedenle yazılımların öğrencilerin matematiksel kavramları kullanmaları ve kavram hakkında bilgilerini ifade etmelerine olanak sağlaması gerekmektedir (Baki, 2002). Komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının kullanılması ve bu kavramlar hakkında öğrencilerin kendilerini ifade etmelerine imkan sağlanması önem arz etmektedir. GeoGebra yazılımı bu tür kavramların işbirlikli ve tartışma ortamları içerisinde ele alınmasını ve bu kavramların daha iyi anlaşılmasını sağlamaktadır (Dikovic, 2009b). Ayrıca, Türkçe dil desteğinin bulunması, ücretsiz olması ve birçok platformda kolaylıkla kurulup kullanılmasından dolayı (Hohenwarter ve Preiner, 2007) komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının ele alınmasında dinamik bir matematik yazılımı olan GeoGebra kullanılmıştır. Analizin temelinde yer alan, limit ve dizilerde limit gibi kavramların anlaşılmasında anahtar görev üstlenen komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının, dinamik matematik ortamında incelenmesi bu tür önemli kavramların yapılandırılmasında alternatif imkânlar sunabilir.

Komşuluk ve yığılma noktası ile ilgili yapılan çalışmalara (Baş ve diğ., 2015; Çetin, Dane ve Bekdemir, 2012; Kabael, Barak ve Özdaş, 2015; Przenioslo, 2004) bakıldığında, araştırmacıların bu kavramlara yönelik öğrencilerin sahip oldukları güçlüklere ve kavramları nasıl algıladıklarına odaklandıkları görülmektedir. Komşuluk ve yığılma noktası, analiz kavramlarının öğrenilmesinde en temel bileşenler olmasına rağmen yapılan çalışmaların sınırlı olduğu görülmektedir. Bu kavramlarla ilişkili çalışmalarda da bunların hangi öğrenme ortamlarında nasıl ele alınması gerektiğine dair uygulayıcılara pratik önerilerin verilmediği görülmüştür. Bu nedenle, bu çalışmada komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının dinamik matematik ortamında keşfedilmesinin öğretmen adaylarının görüşleri doğrultusunda incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla, aşağıdaki araştırma problemlerine cevap aranmıştır:

1. Komşuluk ve yığılma noktası kavramları GeoGebra yazılımıyla dinamik bir ortamda ele alınmadan önce öğretmen adaylarının bu kavramlara ilişkin ön bilgileri ve bu kavramların ele alındığı öğrenme ortamına ait görüşleri nelerdir?

2. GeoGebra yazılımıyla hazırlanan dinamik öğrenme ortamında gerçekleştirilen uygulamaların ardından, öğretmen adaylarının komşuluk ve yığılma noktasına dair bilgileri nasıl değişmektedir ve bu kavramların ele alındığı dinamik öğrenme ortamına ait görüşleri nelerdir?

Matematik eğitiminde, kavrama yönelik tespit çalışmaları çoğunlukla yapılmasına rağmen tespitler doğrultusunda öğrenme ortamlarının tasarlanmasına yönelik çalışmaların sınırlı olduğu belirlenmiştir (Türkdoğan, Güler, Bülbül ve Danişman, 2015). Matematik eğitimi genelindeki bu durum özellikle de komşuluk ve yığılma noktası kavramlarında daha da dikkati çekmektedir. Analizin temel konularının kavramsal olarak anlaşılmasında yığılma noktası önemli bir rol oynamaktadır (Dane, Çetin, Baş ve Özturan Sağırlı, 2016). Bu önemli role rağmen Çetin, Dane ve Bekdemir (2012) limit kavramı ve ilişkili kavramların öğretiminde yığılma noktası kavramına değinilmediğini vurgulamışlardır. Matematik eğitimi bağlamında komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının üzerinde yeterince durulmaması, yapılan çalışmaların sınırlı olması ve yapılmış çalışmaların da uygulamaya dönük somut fikirler vermemesinden dolayı bu çalışmanın analiz kavramlarına temel oluşturan kavramların keşfedilmesine yönelik pratik bir uygulama sunması bakımından alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

## Yöntem

Bu bölümde öncelikle çalışmanın hangi yaklaşımla yürütüldüğü açıklanmış daha sonra katılımcılar, veri toplama aracı, uygulama süreci, verilerin analizi, geçerlik ve güvenirlik başlıkları çerçevesinde çalışmanın yöntemi detaylı bir şekilde sunulmuştur.

Bu çalışmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Nitel araştırmalar ile araştırmacı çok özel bir konu üzerine derinlemesine yoğunlaşma fırsatı yakalamaktadır (Çepni, 2014). Nitel çalışmalarda katılımcıların anlamalarına, tanımlamalarına ve açıklamalarına odaklanılır ve bunların nasıl değiştiği incelenebilir (McMillan ve Schumacher, 2010). Bu çalışmada da, araştırmacı komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının dinamik matematik ortamında keşfedilmesini öğretmen adaylarının görüşleri ışığında detaylı bir şekilde incelemeyi hedeflediğinden dolayı bu yaklaşım benimsenmiştir.

**Katılımcılar**

Çalışmanın katılımcılarını, 15 matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Katılımcıların 11'i kız dördü erkektir. Uygun örnekleme yöntemiyle katılımcılar belirlenmiştir. Bununla araştırmacı katılımcılara ulaşırken zaman ve sınırlılık açısından avantaj yakalamıştır. Bu tür uygulamalı alan eğitimi çalışmalarında sıklıkla tercih edilmektedir (Creswell, 2012).

**Veri Toplama Aracı**

Çalışmada komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının dinamik matematik ortamında keşfedilmesinin öğretmen adaylarının görüşleri ışığında incelenmesi amaçlandığından dolayı veri toplama aracı olarak, katılımcıların bu kavramlara yönelik bilgi ve görüşlerini ortaya çıkarmayı hedefleyen açık uçlu sorulardan oluşan formlar kullanılmıştır. Katılımcılara GeoGebra yazılımıyla (Hohenwarter ve Hohenwarter, 2013) sağlanan dinamik bir öğrenme ortamındaki uygulamalardan önce komşuluk ve yığılma noktasına dair ön bilgilerini ve bu kavramların ele alındığı öğrenme ortamına ait ön görüşlerini içeren toplam 8 açık uçlu soru sorulmuştur. Bu sorulardan birkaç örneğe aşağıda yer verilmiştir:

*"- Komşuluk, delik komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını tanımlayınız ve her bir kavramı birer örnek vererek açıklayınız.*

*- Komşuluk, delik komşuluk ve yığılma noktası kavramlarına ait öğrenmelerinizi nasıl değerlendiriyorsunuz? Bu kavramların öğretimine yönelik değerlendirmeleriniz nelerdir?*

*- Komşuluk, delik komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını tam olarak açıklayamadıysanız sebepleri nelerdir?*

- $\lim_{x \to -3} \sqrt{x}$ *limitinin hesaplanıp hesaplanmayacağını nedeniyle birlikte açıklayınız."*

Komşuluk, yığılma noktası ve limit tanımı ile ilgili olarak GeoGebra yazılımıyla hazırlanan dinamik öğrenme ortamında gerçekleştirilen uygulamaların ardından, öğretmen adaylarının komşuluk ve yığılma noktasına dair bilgilerini ve bu kavramların ele alındığı dinamik öğrenme ortamına ait görüşlerini içeren toplam 11 açık uçlu soru öğretmen adaylarına yöneltilmiştir. Bu sorulardan birkaç örneğe aşağıda yer verilmiştir:

*"- GeoGebra yazılımının komşuluk, delik komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının öğretiminde kullanılmasını nasıl değerlendiriyorsunuz?*

*- GeoGebra yazılımıyla ele alınan komşuluk, delik komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını tam olarak açıklayamadıysanız sebepleri nelerdir?*

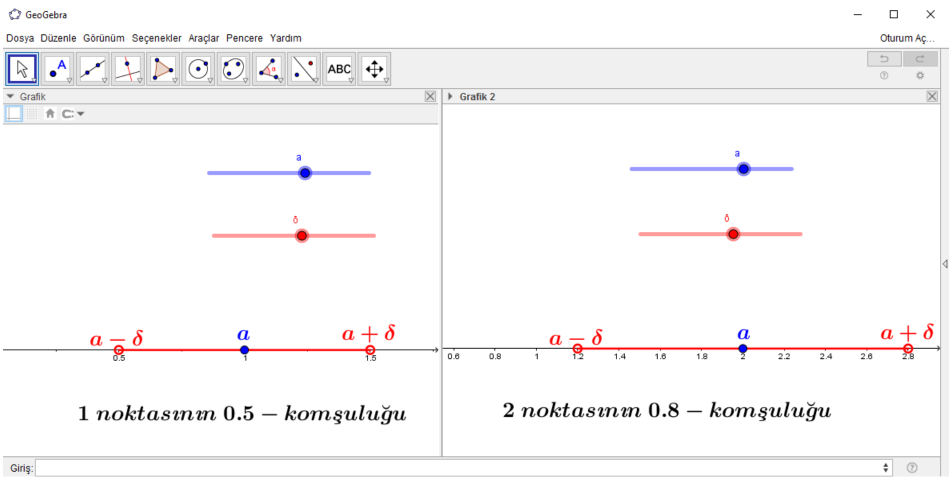
*- GeoGebra yazılımıyla ele alınan komşuluk, delik komşuluk ve yığılma noktası kavramlarına ait öğrenmeleriniz ile uygulamadan önceki öğrenmelerinizi karşılaştırdığınızda ne gibi farklar oldu? Açıklayınız.*
*- Komşuluk, delik komşuluk ve yığılma noktası gibi kavramların öğrenimi ve öğretimi sizce nasıl olmalı? Açıklayınız."*

Uygulama öncesinde ve sonrasında benzer sorular da sorulmuştur. Uygulamadan önce, araştırma sorularının $\lim_{x \to -3} \sqrt{x}$ limitinin hesaplanıp hesaplanmayacağıyla ilgili madde (Kadıoğlu ve Kamali, 2011) uygulamadan sonra da katılımcılara yöneltilmiştir. Buna benzer uygulama öncesi ve sonrası sorulan 4 soru bulunmaktadır. Bunlardan birine de, yine aşağıda yer verilmiştir:

*"-Komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını koordinat düzleminde grafik temsilini kullanarak açıklayınız."*

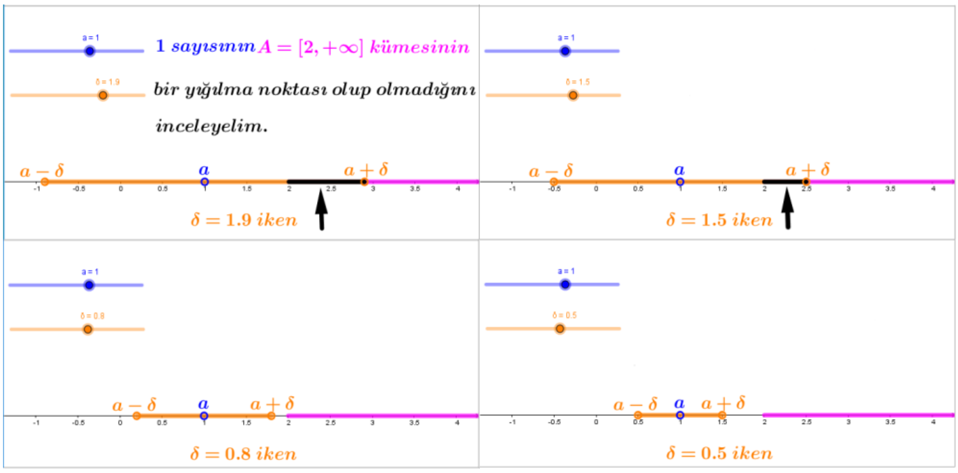
**Uygulama Süreci**

Toplam 10 ders saati boyunca, komşuluk ve yığılma noktası kavramları GeoGebra yazılımıyla dinamik bir ortamda katılımcılarla ele alınmıştır. Uygulama öncesinde araştırmacının yürüttüğü bilgisayar destekli matematik öğretimi dersi kapsamında öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımında temel matematik kavramlarıyla ilgili kendi dinamik materyallerini inşa edebilecek düzeye sahip olmaları için toplam 30 ders saati boyunca yazılımda ilköğretimden yükseköğretim düzeyine kadar farklı seviyelerde çeşitli materyaller ele alınmıştır. Örneğin, GeoGebra yazılımında çember, çokgen, dik doğru ve kesişim araçlarını tanıtmak için Pisagor teoreminin görsel ispatı, giriş alanını tanımak için trigonometrik fonksiyonların grafikleri ve sürgü aracını tanımak için parabolik fonksiyonlar gibi kavramlara ilişkin dinamik materyaller oluşturularak öğretmen adaylarının yazılımda deneyim kazanmaları sağlanmıştır. GeoGebra yazılımında öğretmen adayları matematik kavramlarıyla ilgili kendi dinamik materyallerini oluşturma sürecinde GeoGebra web sitesindeki (www.geogebra.org) örnek dinamik materyallerden ve *GeoGebra'ya Giriş* kitabından (Hohenwarter ve Hohenwarter, 2013) yararlanmıştır. Bu kitap ilköğretimden yükseköğretim düzeyine kadar her seviyedeki matematik öğrenme ve öğretme sürecinde GeoGebra'nın kullanımı hakkında kullanışlı ve pratik bilgiler sunmaktadır (Hohenwarter ve Hohenwarter, 2013). Komşuluk ve yığılma noktası kavramları ele alınırken, öğretmen adayları dinamik materyal oluşturma sürecinde birbirlerine yardımcı olma ve oluşturdukları materyalleri sınıf ortamında sunma imkânı sağlanmıştır. Ayrıca, her dersin başında ele alınan kavram dinamik ortama taşınıp kavram hakkında sorgulamalar yapmadan önce o kavrama ait öğretmen adaylarının sahip oldukları temel bilgiler üzerinden çeşitli tartışmalar yapılmıştır. Örneğin, komşuluk kavramıyla ilgili kavram ele alınmadan önce mutlak değerin geometrik çözümü ve uzaklık olarak ne ifade ettiği ele alınmıştır. Yani, öğretmen adaylarından komşuluk kavramı ele alınmadan önce $|x-2|<1$ denkleminin geometrik çözümünü $x$-ekseninde göstermeleri ve $x$'den 2'ye olan uzaklığın 1'i geçmediğini ifade etmeleri gibi örnekler üzerinde tartışmaları sağlanmıştır (Adams ve Essex, 2010). Daha sonra, komşuluk kavramının günlük hayatta onlara neyi ifade ettiğiyle ve bu kavramı matematiğin hangi konularında nasıl kullandıklarıyla ilgili sorular sorulmuştur. Bu sorgulamalardan sonra, komşuluk kavramının tanımı ele alınmış ve araştırmacı, öğretmen adaylarından bu kavramı dinamik ortama taşımaları istenmiştir. Dinamik materyal inşa sürecinde, öğretmen adaylarının birbirlerinden yardım alabilecekleri vurgulanmış ve yazılımda araçları kullanırken zorlandıkları kısımlarda araştırmacı tarafından desteklenmiştir. Öğretmen adaylarının komşuluk kavramıyla ilgili oluşturdukları dinamik materyallerden birine Şekil 1'de yer verilmiştir.



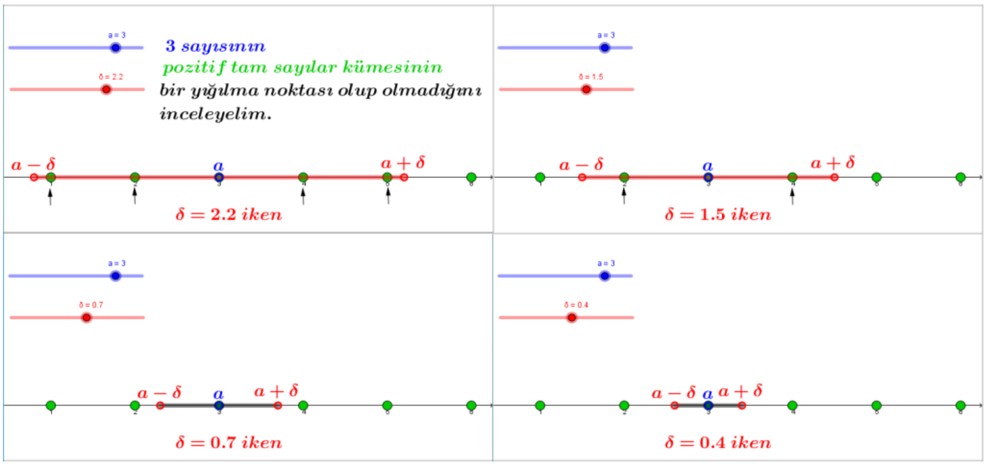

Şekil 1. *Komşuluk Kavramına Ait Geliştirilen Örnek Dinamik Materyalden Bir Görüntü*

Öğretmen adayları, dinamik materyalde sürgü aracını kullanıp $a$ ve $\delta$'nın değerlerini değiştirerek $a$'nın $\delta$ komşuluğunu incelemiştir. Delik komşuluk kavramıyla ilgili dinamik materyalde ise, öğretmen adayları GeoGebra yazılımında bulunan noktanın stili özelliğini kullanarak $a$ noktasının içini boşaltmıştır. Sürgü araçlarını kullanıp farklı değerlerde komşuluk ve delik komşuluk kavramları ele alındıktan sonra, bu kavramların yığılma noktası ile olan ilişkisi ele alınmıştır. Yığılma noktasının ele alındığı derslerde öğretmen adaylarıyla bu kavramın tanımı ve nerelerde kullanıldığıyla ilgili ön tartışmalardan sonra öğretmen adaylarının yaptığı materyallerden biri Şekil 2'de verilmiştir.




Şekil 2. *Yığılma Noktası İle İlgili Dinamik Materyallerden Görüntüler*

Bu materyalde amaç, $a = 1$ sayısının $A = [2, +\infty)$ kümesinin bir yığılma noktası olup olmadığı incelenmektedir. Öğretmen adayları $\delta$ değerini sürgü aracılığıyla farklı değerlere getirerek $a$'nın her delinmiş komşuluğunun $A$ kümesinin en az bir elemanını içerip içermediğini dinamik bir şekilde araştırmıştır. $\delta = 1.9$ ve $\delta = 1.5$ için $a$'nın delinmiş komşuluğunun $A$ kümesinden elemanlar içerdiği, ancak $\delta = 0.8$ ve $\delta = 0.5$ iken $a$'nın delinmiş komşuluğunun $A$ kümesinin en az bir elemanını ihtiva etmediği öğretmen adayları tarafından dinamik bir şekilde keşfedilmiştir. Böylece $a$'nın her delinmiş komşuluğunun $A$ kümesinden elemanlar içermediğinden dolayı $a = 1$ sayısının $A = [2, +\infty)$ kümesinin bir yığılma noktası olmadığı dinamik bir ortamda öğretmen adayları tarafından materyal oluşturularak incelenmiştir. Öğretmen adayları oluşturdukları dinamik materyalde $a$ sayısını sürgüye bağlayarak $a$'nın değerlerini değiştirerek farklı noktalardaki değerleri için de bu sayının $A = [2, +\infty)$ kümesinin bir yığılma noktası olup olmadığını inceleyebilmektedir. Bununla birlikte, yığılma noktasının fonksiyon ve dizilerde limit kavramları için önemi üzerinde durulmuştur. Yığılma noktasının dizilerde limit tanımının anlaşılmasındaki rolünü incelemek amacıyla, öğretmen adaylarıyla fonksiyon ve dizilerde limit kavramı tartışılmıştır. Bunun sonucunda, yığılma noktası ve dizilerde limit kavramı arasındaki ilişkinin inşa edildiği dinamik materyallerden birine de Şekil 3'de yer verilmiştir.




Şekil 3. *Dizilerde Limit Kavramında Yığılma Noktasının İncelenmesi*

Fonksiyonlardaki limit kavramında bahsedilen limit alınan noktanın tanım kümesinin bir yığılma noktası olması şartı dizilerde limit incelemesi yapılırken de geçerlidir. Öğretmen adaylarının dinamik bir ortamda oluşturdukları materyalde $a = 3$ sayısının pozitif tam sayılar kümesinin bir yığılma noktası olup olmadığı incelenmektedir. Öğretmen adayları $\delta$ değerini farklı değerlere getirerek $a$'nın tüm delinmiş komşuluklarının pozitif tam sayılar kümesinin en az bir elemanını içerip içermediğini dinamik bir şekilde araştırmıştır. $a = 3$ sayısının her delinmiş komşuluğu için pozitif tam sayılar kümesinin en az bir elemanını ihtiva etmediği (örneğin $\delta = 0.7$ ve $\delta = 0.4$ değerlerinde) öğretmen adayları tarafından dinamik bir şekilde materyal oluşturularak üzerinde durulmuştur. Öğretmen adayları oluşturdukları dinamik materyalde $a$ sayısını sürgü aracılığıyla herhangi bir reel sayı değerine getirerek hiçbir reel sayının pozitif tam sayılar kümesinin bir yığılma noktası olmadığını keşfetmiştir. Bunun sonucunda, herhangi bir reel sayı değeri için değil sadece $n \to \infty$ için dizilerin limitinin neden tanımlandığını öğretmen adayları materyal oluşturarak açıklamıştır.

## Verilerin Analizi

Uygulamadan önce ve sonrasında elde edilen verilerin analizi, betimsel analiz yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Betimsel analizde veriler açık bir biçimde betimlenir, daha sonra bunlar açıklanır ve yorumlanır, bunlar arasında neden sonuç ilişkileri incelenir ve ortaya çıkan ilişkilere araştırma bağlamında yorum ve tahminler yapılır. Burada katılımcıların görüşlerini yansıtmak ve yapılan betimlemeleri zenginleştirmek için sık sık doğrudan alıntılara yer verilmesi gerekmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

**Geçerlik ve Güvenirlik**

Komşuluk ve yığılma noktası kavramları dinamik bir ortamda ele alınırken katılımcıların materyal oluşturarak öğrenmesi ve kavramlar hakkında tartışma yapabilmesi için uygulama öncesinde 30 ders saati süresince katılımcılar yazılımla uzun süreli bir etkileşim içerisinde bulunmuşlardır. Bu süreç sonunda10 ders saati boyunca komşuluk ve yığılma noktası kavramları GeoGebra yazılımında ele alınmıştır. Katılımcıların böylece GeoGebra yazılımıyla komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının keşfedilmesine yönelik oluşturdukları anlamların görüşlerine yansıtılabilmesi için yetecek düzeyde bir zaman dilimine sahip oldukları söylenebilir. Bu zaman dilimi ve sonrasında bir alan eğitimcisi uzmanından araştırma konusu ve süreç hakkında dönüt alınmıştır. Dönütler sayesinde araştırmacı kendi yaklaşımına eleştirel bir gözle bakma fırsatı bulmuştur (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bununla birlikte araştırmacı süreç sonrasında verileri özetleyip katılımcılar ile bunların doğruluğu hakkında bir tartışma ortamı oluşturarak verilerin katılımcılar ile teyit edilmesine olanak sağlamıştır (McMillan ve Schumacher, 2010). Elde edilen veriler çalışmada sık sık doğrudan alıntılarla ayrıntılı bir şekilde betimlenerek araştırma sonuçlarının aktarılabilirliği sağlanmaya çalışılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Ayrıca bu veriler bir bulut depolama alanına kaydedilerek istenildiğinde kolaylıkla incelenebilmesi sağlanmıştır.

## Bulgular

Verilerin analizi sonucunda elde edilen bulgular uygulama öncesi ve sonrası olmak üzere iki ayrı alt başlık halinde sunulmuştur.

**Uygulama Öncesi**

Komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının GeoGebra yazılımıyla dinamik bir ortamda ele alınmadan öncesinde öğretmen adaylarının bu kavramlara ilişkin ön bilgilerinin ve bu kavramların ele alındığı öğrenme ortamına ait görüşlerinin neler olduğunun belirlenmesi amacıyla öğretmen adaylarına açık uçlu sorular yöneltilmiştir. Bu soruların içeriğinde, öğretmen adaylarının komşuluk, delik komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını nasıl tanımladıklarına, bu kavramlara ait ön öğrenmelerinin neler olduğuna, kavramların uygulama öncesinde ele alındığı öğrenme ortamlarını nasıl değerlendirdiklerine ve bu kavramların limit ile ilişkisini nasıl açıkladıklarına ilişkin sorgulamalar yer almaktadır. Komşuluk ve yığılma noktası kavramları GeoGebra yazılımıyla dinamik bir ortamda ele alınmadan önce 15 öğretmen adayından elde edilen veriler betimsel analize tabi tutulmuştur. Analiz sonucunda elde edilen değerlendirmeye Şekil 4'de yer verilmiştir.


Şekil 4. *Öğretmen Adaylarının Komşuluk ve Yığılma Noktası Kavramlarına İlişkin Uygulama Öncesi Değerlendirmeleri*

Şekil 4 incelendiğinde, öğretmen adaylarının komşuluk ve yığılma noktası kavramlarına ait tanımları yapamadıkları ve bu kavramları hem kendi aralarında hem de limit kavramı ile ilişkilendiremedikleri görülmektedir. Ayrıca, öğretmen adayları komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını ezberleyerek öğrendiklerini önemsiz, soyut ve zor olarak gördüklerini vurgulamış ve bu kavramlara ilişkin kaygıya sahip olduklarını belirtmişlerdir.

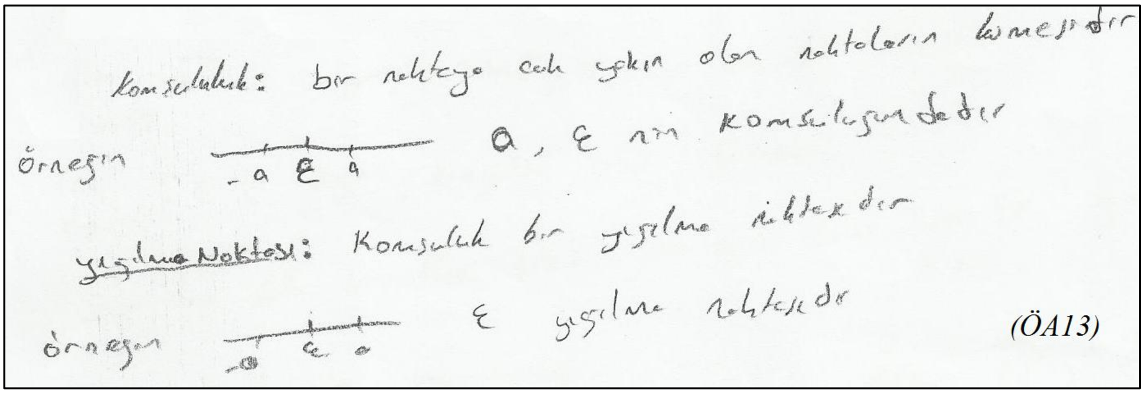
Komşuluk ve yığılma noktası kavramları GeoGebra yazılımıyla dinamik bir ortamda ele alınmadan önce, öğretmen adaylarının komşuluk ve yığılma noktasını eksik ve hatalı tanımladıkları belirlenmiştir. Matematik öğretmeni adaylarının aşağıdaki tanımlamaları buna örnek olarak verilebilir:

*"Komşuluk* $-a \le \varepsilon - x \le a$ *buradan* $x - a \le \varepsilon \le x + a$ *verilen ifade de* $\varepsilon$ *sayısının* $[x - a, x + a]$ *komşuluğunda değer alır. Bundan yola çıkarsak komşuluk için şunu diyebiliriz. Verilen* $\varepsilon$ *sayısını* $x - a$ *ve* $x + a$ *komşuluğundadır (ÖA3)."*

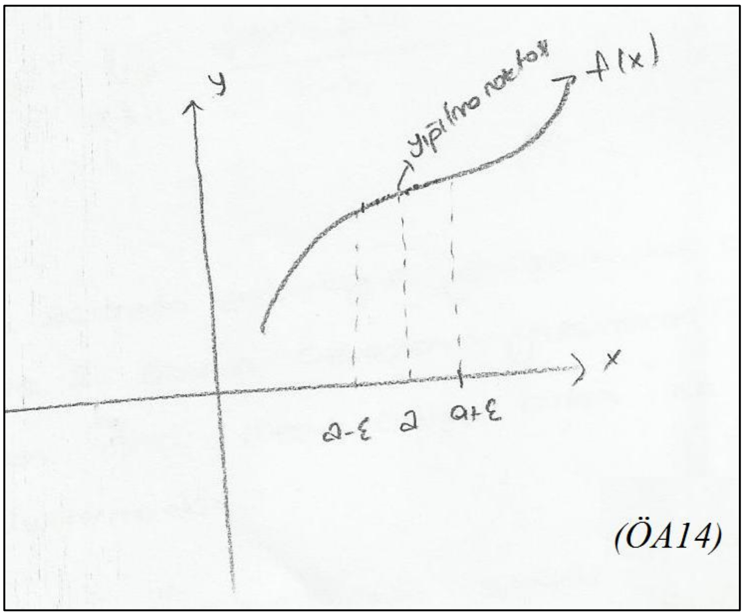
*"*$2 - \varepsilon$ *ve* $2 + \varepsilon$ *arasında kalan sayılar 2 nin komşuluğunda bulunan sayılardır.* $2 - \varepsilon$ *ve* $2 + \varepsilon$ *arasında bulunan sayıların yığılma noktası yani yakınsadığı değer 2 dir. Sayı doğrusu üzerinde bir sayı yoğunluğu vardır. Bu yoğunluğun genel anlamda yakın oldukları nokta yığılma noktasıdır (ÖA5). "*

*"Yığılma noktası sonsuz çokluktaki bir bölgenin veya bir kümenin en fazla değer aldığı bölgeye yığılma noktası denir (ÖA8)."*

*"Komşuluk, bir nokta etrafındaki sonsuz çokluktaki noktalar kümesidir. Yığılma noktası, limitte her değerin aynı noktaya işaret etmesidir (ÖA9)."*

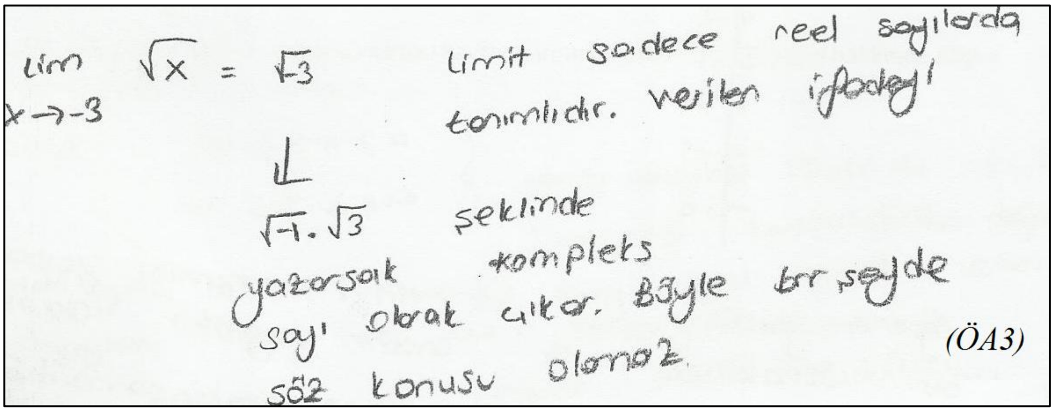



(ÖA13)




(ÖA14)

ÖA3'ün komşuluk kavramıyla ilgili yaptığı tanıma bakıldığında komşuluk kavramının tanımlanmasında kullanılan sembol ve terimleri doğru bir şekilde kullanamadığı görülmektedir. ÖA5'in yığılma noktasına dair yaptığı informal tanıma bakıldığında yoğunluk ve yakın kelimelerini kullandığı ve kavramın tanımı için gerekli delik komşuluk kavramıyla ilişkilendiremediği görülmektedir. Ayrıca ÖA14'ün yığılma noktasını eğri üzerinde olduğunu düşünerek tanım kümesiyle ilişkilendiremediği görülmektedir. Öğretmen adaylarının komşuluk ve yığılma noktası arasındaki ilişkinin yanında, yığılma noktasının limit kavramıyla olan ilişkisini ortaya koyamadıkları belirlenmiştir. Bu ilişkilendirmeyi yapamadıklarına yönelik olarak bazı örneklere de aşağıda yer verilmiştir:



(ÖA3)

*"$\lim_{x \to -3} \sqrt{x}$ limiti hesaplanamaz çünkü limit reel sayılar üzerinde tanımlıdır (ÖA4)."*

*"$\lim_{x \to -3} \sqrt{x}$ limiti hesaplanamaz $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunda $x = -3$ noktasından $f(-3) = \sqrt{-3}$ reel sayılar kümesinde değildir $\sqrt{-3}$ sayısı kompleks bir sayıdır bundan dolayı limit yoktur (ÖA7)."*

*"Limitin var olabilmesi için $\lim_{x \to -3^+} \sqrt{x} = \lim_{x \to -3^-} \sqrt{x}$ olmalı. Limit var olduğundan onu grafikle gösterebilmeliyiz ancak $\sqrt{-3}$ sayısını koordinat düzleminde bir yere yerleştiremediğimiz için limit hesaplanamaz (ÖA10)."*

*" $\lim_{x \to -3^+} \sqrt{x} = L$ , $\lim_{x \to -3^-} \sqrt{x} = L$ ve $f(-3) = L$ gibi bir reel sayı elde edebiliyorsak limit vardır ve L'dir denir. $x \geq 0$ olması reel olabilmesi için x in yerine -3 yazdığımızda reel olmuyor ve bu nedenle reel sayılarda limit yoktur. Kompleks sayılarda limiti var olabilir (ÖA15)."*

Burada yer alan ifadelerden, öğretmen adayları bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için tanımlı olması gerektiğini düşündükleri görülmektedir. Limit alınan noktanın yığılma noktası olması gerektiği ve bu noktada tanımlı olmasına gerek olmadığına dair herhangi bir değerlendirme öğretmen adayları tarafından yapılmamıştır. Bu değerlendirme ve kavramı tanımlamalarda sembol ve terimleri ilişkisiz bir şekilde kullanmaları göz önüne alındığında bu kavramları öğrenirken öğretmen adaylarının kavramları ezberledikleri yönündeki görüşleri dikkati çekmektedir. Bu görüşlere örnek olarak şu ifadeler verilebilir:

*"Komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını hiçbir zaman öğrenemedim. Bazen sınava yönelik ezberleyip geçmişliğim oldu ama sınav bitince öğrendiklerimi de unuttum zaten (ÖA1)."*

*"Bu kavramları nasıl ifade etmem gerektiğini bilmiyorum. Çünkü konu içerisinde sıkça bahsedilen ancak ne olduğunun açıklanmadığı veya bir tanımla sınırlandırıldığı*

*kavramlardır. Bu kavramların bir tanım olarak dillendirilmesi ezbere yönelttiğinden hiçbir faydası olmamıştı (ÖA4).”*

*“Biz sadece soruyu çözmeye odaklandığımız için kavramın öneminin farkında değiliz. Konuya girişte bu kavramların ne oldukları ezberletilmeden öğretilmelidir. Biz öğrencilerde sadece soru çözeyim sınavdan geçeyim havasında değil de gerçek anlamda öğrenmeye çalışabiliriz… Ezberlediğim için tam kavramadım ve unuttum. Bu kavramları ezberletmek yerine kavratmak daha doğru olur diye düşünüyorum… Bu kavramlar sıklıkla karşımıza çıkıyor bunun öneminin vurgulanması daha iyi olur diye düşünüyorum (ÖA9).”*

ÖA9 bu kavramları ezberlediği için öğrenemediğiyle ilgili görüşlerinde bu kavramların öneminin vurgulanmadığını da ifade etmiştir. Benzer olarak, ÖA6'da bu kavramlara önem vermediğini şu cümlelerle belirtmiştir:

*“Kavramları tam olarak açıklayamamamın sebebi tanımlara önem vermemem ve konuyu tekrar etmememden kaynaklanıyor. Konuları işlemsel düşünüp direkt sorulara odaklanmaya çalışınca tanımlar eksik… Ayrıca konular derin, geniş ve zor konular… (ÖA6).*

Öğretmen adaylarından uygulamadan önce elde edilen veriler komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının soyut ve zor olduğunu göstermektedir. Buna örnek olarak öğretmen adaylarının şu görüşleri verilebilir:

*“Bu kavramların teorik bilgi yığını olmadığının farkındayım, fakat teorik bilgiyi bile tam olarak bilmediğimi düşünüyorum. Yani bu konuların ne olduklarını öğrendikten sonra kavrayabilmem için somutlaştırmalar yapmam gerekmektedir. Kavramların sadece ne olduklarını değil matematik dünyasında ne işe yaradığını görevlerini bilmem gerekmektedir. Ben bu şekilde öğrenemediğimden kaynaklı kavramlar hakkında sınırlı bilgilerimi bile aktarmakta zorluk yaşıyorum... Soyut kavramlar olmasından kaynaklı bu kavramlar hakkındaki bilgi seviyemi göstermekte çok zorluk çekiyorum (ÖA5).”*

*“Bu kavramları tam olarak ifade edebildiğimi zannetmiyorum. Bu kavramların öğretiminin kolay olduğunu düşünmüyorum (ÖA13).”*

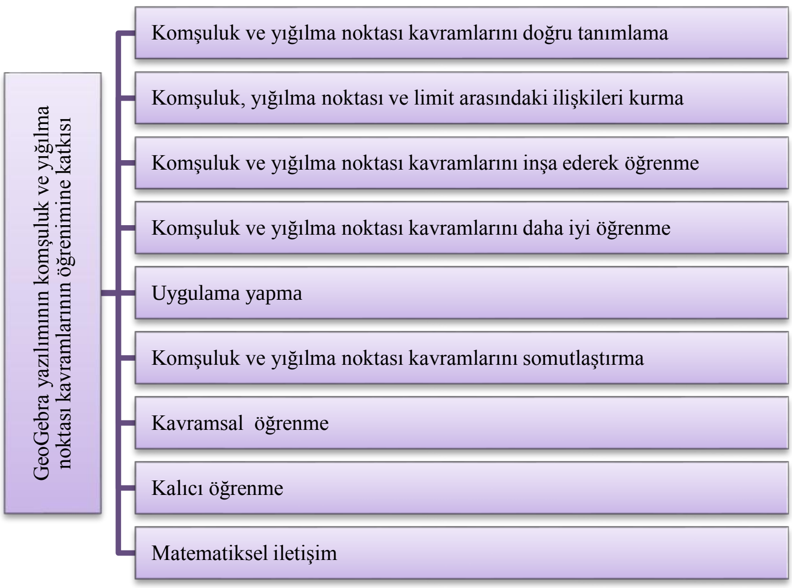
Öğretmen adayları, komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını öğrenirken kaygı yaşadıklarını belirtmişlerdir. ÖA2’nin bu yöndeki düşünceleri bu görüşü destekleyen örneklerden biri olarak değerlendirilebilir:

*“Bu kavramlar yani komşuluk ve yığılma noktası gibi öğrenciye verilirken çok fazla tanım içerikli veriliyor. Yapılan tanımlar uzun olduğu için öğrencinin gözü korkuyor ve tanıma çok fazla dikkat etmiyor. Komşuluk nedir den ziyade bu komşuluktur üzerinde daha fazla*

*duruluyor. Bundan dolayı öğrenciye kavramların ne olduğu öğretilirken uzun uzun tanımlar semboller yerine daha öz ve uygulamalı olarak kavramların ne anlam ifade ettiğini verirsek öğrenci için daha verimli olur (ÖA2).”*

**Uygulama Sonrası**

10 ders saati boyunca komşuluk ve yığılma noktası kavramları GeoGebra yazılımıyla dinamik bir ortamda ele alındıktan sonra, toplam 15 öğretmen adayından elde edilen verilerin betimsel analizi yapılmıştır. Veriler açık uçlu sorulardan elde edilmiştir. Bu soruların içeriğinde; öğretmen adaylarının komşuluk, delik komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını nasıl tanımladıklarına ve limit ile olan ilişkisini nasıl ortaya koyduklarına, GeoGebra yazılımının bu kavramların öğretiminde kullanılmasını nasıl değerlendirdiklerine, GeoGebra yazılımıyla ele alınan bu kavramlara ait öğrenmeleri ile uygulamadan önceki öğrenmelerini nasıl değerlendirdiklerine ilişkin sorgulamalar yer almaktadır. Verilerin analizi sonucunda oluşan değerlendirmeler Şekil 5’de verilmiştir.




Şekil 5. *Komşuluk ve Yığılma Noktası Kavramlarının GeoGebra Yazılımıyla Öğrenimine Ait Öğretmen Adaylarının İfadelerinin Değerlendirilmesi*

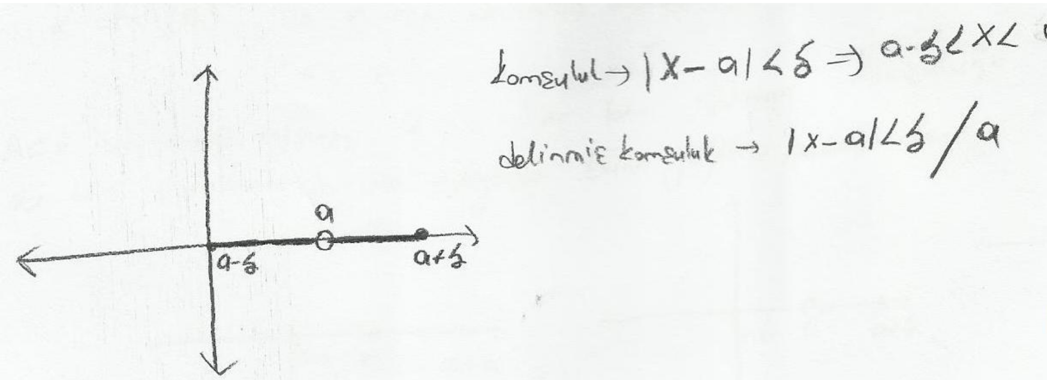
Yukarıda yer verilen Şekil 5 incelendiğinde, öğretmen adaylarının yapılan GeoGebra uygulamalarından sonra komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını doğru tanımlayabildikleri, bu kavramları hem kendi aralarında hem de başka kavramlarla doğru bir şekilde ilişkilendirebildikleri, kavramları dinamik bir ortamda inşa ederek ve uygulama yaparak öğrendikleri belirlenmiştir. Ayrıca, GeoGebra yazılımının kullanıldığı dinamik bir öğrenme ortamının kavramsal ve kalıcı öğrenmeyi, kavramların somutlaştırılmasını ve ele alınan kavramlara ait matematiksel sembol ve terminolojiyi doğru ve etkin bir şekilde kullanılmasını sağlayarak iletişim ortamını desteklediği öğretmen adayları tarafından vurgulanmıştır.

Öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımının kullanıldığı dinamik bir öğrenme ortamında yapılan uygulamalardan sonra komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını doğru tanımlayabildikleri belirlenmiştir. Buna örnek olarak, bazı öğretmen adaylarının tanımlamalarına aşağıda yer verilmiştir:

*"a'nın $\delta$ komşuluğu $\delta > 0$ herhangi bir reel sayı ise $\{x \in R : |x - a| < \delta\}$ kümesine a 'nın komşuluk kümesi denir (ÖA1)."*

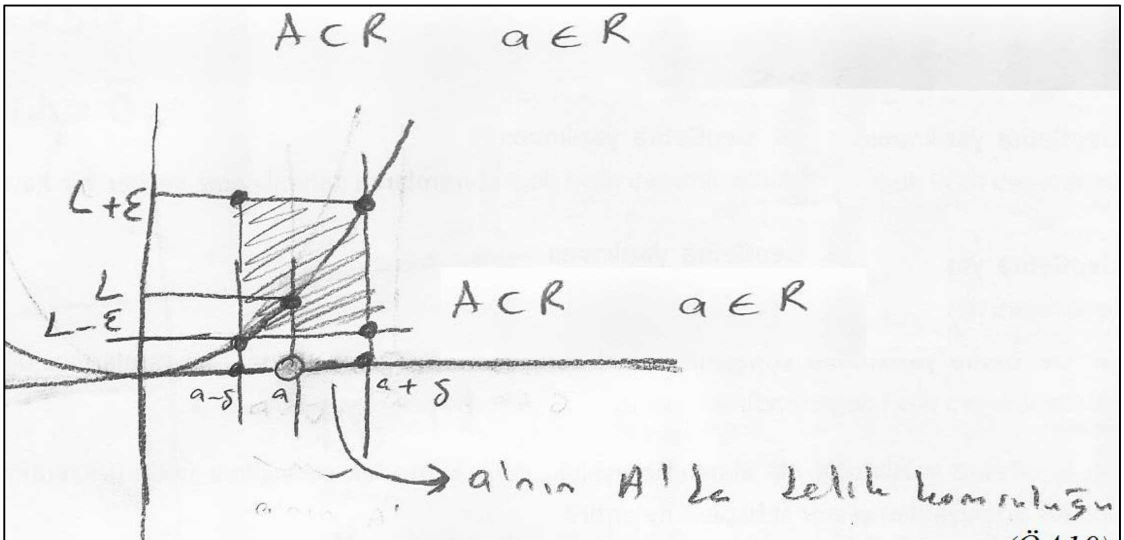
*"$a \in R$ $(a - \delta, a + \delta)$ açık aralığında a'nın komşuluğu denir. Bu açık aralıkta a noktasını çıkarırsak delinmiş komşuluk elde ederiz (ÖA2)."*

*"$|x - a| < \delta$ ifadesinde komşuluğu görebiliyoruz. Şöyle ki bir a noktası ve $\delta$ ya bağlı $a + \delta$ ve $a - \delta$ noktaları oluşturup bu noktaları birleştirdiğimiz zaman komşuluğu elde etmiş oluruz. Bu elde ettiğimizde a noktasını çıkarmamız bize delinmiş komşuluğu verir. Yığılma noktası ise delinmiş komşuluk ile tanım kümesini kesiştirdiğimizde her $\delta$ değeri için en az bir eleman bulunuyorsa buna yığılma noktası denir (ÖA4)."*




(ÖA6)

*"$A \subset R$ ve $a \in R$ olmak üzere $a \in R$ 'in her delinmiş komşuluğu A kümesinin en az bir elemanına denk geliyorsa a, A'nın yığılma noktasıdır (ÖA9)."*




*(ÖA10)*

Öğretmen adaylarına $\lim_{x \to -3} \sqrt{x}$ limitinin hesaplanıp hesaplanmayacağı ve dizilerin limitinin neden sadece n→∞ durumunda olduğuna yönelik sorular yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının komşuluk ve yığılma noktası kavramları arasındaki ilişkiyi ve bu kavramların limit ve dizilerde limit kavramlarıyla olan ilişkiyi keşfettikleri de bu araştırmada belirlenmiştir. Bunu destekleyen bazı öğretmen adaylarının ifadeleri de şu şekildedir:

*"$x \to -3$ değeri $\sqrt{x}$ için bir yığılma noktası değildir. Bu yüzden $\lim_{x \to -3} \sqrt{x}$ in limiti hesaplanamaz (ÖA1)."*

*"$f(x) = \sqrt{x}$ $x = -3$ noktası $R^+$ tanım kümesinde bir yığılma noktası olmadığı için $x = -3$ noktasında fonksiyonun limiti yoktur (ÖA7)."*

$\lim_{x \to a} f(x)$ in limiti olması için a'nın f(x)'in tanım kümesinin (x ekseni)
yığılma noktası olmalı. Dizilerde de geçerlidir. $Z^+$ kümesindeki hiçbir
elemanı dizinin tanım kümesi için bir yığılma noktası değildir.
Yığılma noktası yok ise limitten söz edilemeyiz. Dizilerde limit sadece
sonsuza gider.

*(ÖA9)*

*"GeoGebra'dan önce kavramları ifade etmede zihnimde canlandırmada kavramlar arasındaki ilişkileri değerlendirmede çok yetersizdim. Ancak GeoGebra ile hem ifade etmede hem de anlamlandırmada özellikle zihnimde canlandırmada ilerlediğimi düşünüyorum (ÖA10)."*

*“ $f(x)$ tanım kümesine baktığımızda $\sqrt{x}$ burada karekök tanımlanmış karekökün tanım aralığı $[0,+\infty]$ da tanımlandığından a'nın her delinmiş komşuluğu $f(x)$ tanım kümesinin en az bir elemanına karşılık gelmediği için limit yoktur (ÖA12).”*

*“$\sqrt{x}$ fonksiyonunun tanım kümesi $[0,+\infty]$ aralığındadır ve $-3$'ün $[0,+\infty]$ kümesinin bir yığılma noktası olup olmadığını incelememiz gerekir. $-3$'ün $2$ komşuluğundaki hiçbir eleman [0, $+\infty]$ kümesiyle kesişmiyor. Bu yüzden $-3$, $[0,+\infty]$'un yığılma noktası değildir. Yığılma noktası olmadığından hesaplanamaz… Komşuluğu ya da diğer kavramları tanımdan öte ilişkilendirme yapmadık… Diğer derslerle ilişkisini kurmuyordum. Bir limitin komşuluk, delik komşuluk, yığılma noktası ile inşa edilebileceğinin farkında değildim… GeoGebra’da ilişkilendirme yapabiliyorum görsel temsili aklımda olduğundan unutulsa bile görselinden yola çıkarak yeniden bilgiye ulaşabiliyorum (ÖA14).”*

Ayrıca, öğretmen adayları GeoGebra yazılımında kendi matematiksel inşalarını oluşturduklarını, komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını uygulama yaprak ve inşa ederek daha iyi öğrendiklerini belirtmişlerdir. Bunu destekleyen bazı öğretmen adaylarının görüşlerine de aşağıda yer verilmiştir:

*“Daha iyi anladık çünkü bu sefer ezberlemedik kavradık. Tanımı öğretmenden duyduğumuz gibi basmakalıp ifadelerle anlamaya çalışmadık. Kendimiz materyal inşa edip tanımı kendi cümlelerimizle kurduk. GeoGebra yazılımında bu kavramları göstermeden önce kavramların tanımlarıyla ilgili pek fazla fikrim yoktu. Limit konusunda verilen soruları çoğunu belki çözüyordum ama tanım yapmam mümkün değildi… Bu kavramların öğrenciye interaktif ortamda inşa edilerek pekiştirilmesi ve bol örnekle beslemesi gerekiyor (ÖA1).”*

*“GeoGebra yazılımı sayesinde bu kavramlar daha iyi öğrenildiği için GeoGebra yazılımının kullanımı daha iyi anlamayı sağlar… Bu kavramları GeoGebra da inşa ettiğim haliyle gözümde canlandırabiliyorum… GeoGebra yazılımı sayesinde komşuluk kavramını delik komşuluk ve yığılma noktalarını inşa ettik. Yazılım sayesinde bunları birer birer görmüş olduk. Bu kavramların öğretiminde sürgüleri canlandırdığımızda neye bağlı olduğunu, komşulukların nasıl oluştuğunu nasıl bir noktada durduğunu gördük (ÖA3).”*

*“Uygulamadan önce komşuluk delik komşuluk ve yığılma noktası gibi tanımları tam olarak anlamıyordum bana zor geliyordu karmaşık gibi gözüküyordu gözümde. GeoGebra ile kolaylıkla komşuluk, delik komşuluk ve yığılma noktasını öğrenip anlayabildim. Uygulamadan önce aralarındaki farkı tam olarak anlamıyordum karıştırıyordum birbirine GeoGebra bana çok yardımcı oldu bu konuda… GeoGebra ile uygulamalı olarak gösterildiği için aralarındaki ilişkiyi ve farkı da*

*kolaylıkla görmesini sağlayabiliyor. GeoGebra ile aynı zamanda sadece bir noktası değil kolaylıkla istediğin noktayı gösterip daha çok örnekle öğrenmemi pekiştirebildim (ÖA13).”*

*“Komşuluk, delik komşuluk ve yığılma noktası kavramları da çok önemli bunu iyice anlamak gerekiyor. Materyal hazır bir şekilde bize sunulursa yine öğrenmeler gerçekleşirdi ancak kendimiz inşa edince anlamamız ve kavramamız kolaylaşıyor ve bu kavramı tam olarak öğrenebiliyoruz (ÖA15).”*

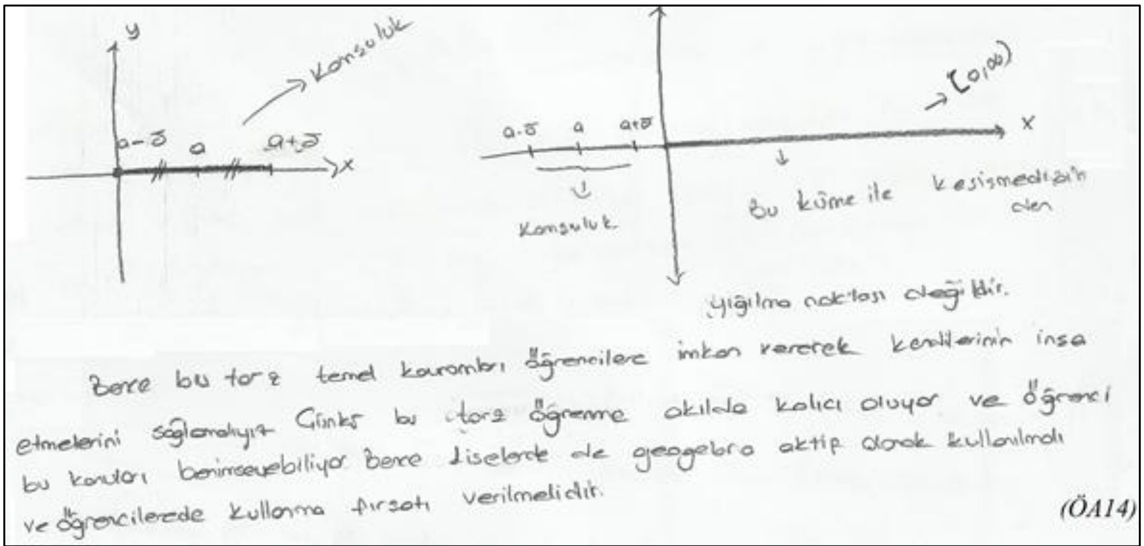
GeoGebra yazılımında komşuluk ve yığılma noktası kavramları ele alınmadan önce öğretmen adayları bu kavramların soyut olduğunu ve bu nedenle ezberleyerek öğrendikleri için unuttuklarını ifade etmiştir. GeoGebra ile yapılan uygulamalardan sonra yazılımın sağladığı dinamik inşalar somut bir öğrenme ortamı sunarak kalıcı öğrenmeyi desteklediği öğretmen adaylarının görüşlerinde dikkati çekmektedir. Buna örnek olarak bazı öğretmen adaylarının görüşlerine de aşağıda yer verilmiştir:

*“Bu kavramları somutlaştırmak anlamayı kolaylaştırıyor. Materyali adım adım inşa etmenin daha faydalı olduğunu düşünüyorum. Böylelikle keşfederek amaca ulaşmış oluyoruz. Ayrıca bu şekilde basitten karmaşığa ilerlememiz her adımda bir öncekini tekrar olanağı sunduğundan öğrenmenin daha kalıcı olmasını sağlamaktadır (ÖA4).”*

*“Bu kavramlar soyuttur. GeoGebra sayesinde somutlaştırılarak birbirleri arasındaki ilişkileri gözle görülür hale getirebiliyoruz. Bu da öğretimde kalıcılığı sağlar (ÖA5).”*

*“Soyut kısımları GeoGebra sayesinde somutlaştırabildiğim için rahatça görüyorum. Tanımı unutsam bile uygulamayı yapıp veya hatırlayıp tanımı ifade edebiliyorum. Örneğin* $A \subset R$ *ve* $a \in R$ *olmak üzere* $a \in R$ *'nin her delinmiş komşuluğu A kümesinin bir elemanına denk geliyorsa a, A'nın yığılma noktasıdır (ÖA9).”*

*“Somut verilerle öğretmen denetiminde kendi başımıza bu kavramları ifade etmeye inşa etmeye çalıştığımız için öğrenme daha verimli oluyor. GeoGebra'nın bize sunduğu imkanlar sayesinde (dinamizmi, cebirsel, grafiksel ve hesap çizelgesindeki gösterim) öğrenme daha kalıcı oluyor. Kavramları GeoGebra ile kendi başımıza inşa etme fırsatını elde ettiğimiz için kavramları birkaç matematiksel soyut ifade olmaktan çıkarıp kavramları içselleştirmemiz ve somut olarak zihnimizde ve bir görselin canlanabilmesi daha kolay oluyor (ÖA10).”*



(ÖA14)

ÖA4 materyal inşa ederken inşa adımları sayesinde tekrar etme olanağıyla kalıcılığın desteklendiğini, ÖA10 ise soyut olarak gördükleri bu kavramları dinamik ortamda inşa ederek kavramların farklı temsillerinden yararlanıp somutlaştırmanın sağlandığı böylelikle bilgiyi içselleştirdiklerini belirtmişlerdir. Ayrıca, öğretmen adayları dinamikliğin sağlandığı bu ortamda kavramsal öğrenmelerinin desteklendiğini de ifade etmişlerdir. Buna örnek olarak öğretmen adaylarının şu görüşleri verilebilir.

*“Şimdi öğretimde en çok sorun yaşadığımız şey öğrencinin kavramın içindeki olguları yani neyin ne olduğunu (örneğin $|x-a|$ nedir gibi) görmesi… GeoGebra sayesinde bunları birbirinden ayırt edebiliyoruz yani olguları görebiliyoruz. Daha sonrasında oradaki matematiksel ilişkiyi görebiliyoruz. Genellememelere ulaşabiliyoruz yani örneklerle sınırlı kalmıyoruz. GeoGebra sayesinde dinamik ortamda kavramların örneklerini artırıp genellemelere ulaşabiliyoruz (ÖA7).”*

*“Bu dersimizde tanımlamayla kalmadık alt kavramları tanımladık, ne nereden geldi onu gördük ve GeoGebra yardımıyla bir de bunu görselleştirdik. Kısacası sunuş yoluyla öğrenmenin aksine buluş yolu yaparak yaşayarak öğrenme vardır. GeoGebra’da kademeli olarak komşuluk, delik komşuluk ve yığılma noktası kavramları açıklanarak limit tanıtımında kavramsal bir öğrenmenin gerçekleşmesi sağlanır (ÖA12).”*

*“Komşuluk delik komşuluk ve yığılma noktasının GeoGebra ile anlatılıp öyle öğrencilere öğretilmesinden yanayım, GeoGebra ile zaten neyin ne olduğu rahatlıkla görülüp arasındaki ayrıma varılabiliyor (ÖA13).”*

## Tartışma

Komşuluk ve yığılma noktası kavramları GeoGebra yazılımı ile dinamik bir öğrenme ortamında ele alınmadan önce, öğretmen adaylarının bu kavramları hatalı ve eksik bir şekilde tanımladıkları belirlenmiştir. Ayrıca, komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını kendi aralarında veya limit kavramı ile ilişkilendiremedikleri de tespit edilmiştir. Öğretmen adayları fonksiyonlarda limitin var olabilmesi için o noktada tanımlı olması gerektiğinden hareket ederek $\lim_{x \to -3} \sqrt{x}$ limitinin hesaplanmayacağını yığılma noktasıyla ilişkilendirmek yerine, o noktada tanımlı olmamasına bağlamaktadırlar. ÖA3, ÖA4, ÖA7, ÖA10 ve ÖA15'in uygulamadan önceki görüşleri bu fikri destekler niteliktedir. Öğretmen adayları bir fonksiyonun hangi noktadaki limiti araştırılıyorsa o noktada tanımlı olması gerektiğine ait yanlış bilgiyi içselleştirmiş olması sonucunda $\lim_{x \to -3} \sqrt{x}$ limitinin reel sayılarda hesaplanmayacağını ancak karmaşık sayılarda hesaplanabileceğini düşünmektedirler. ÖA15'in uygulamadan önceki açıklamaları bu değerlendirmeyle paralellik göstermektedir. Öğretmen adaylarının uygulamadan önceki komşuluk ve yığılma noktası kavramlarına ait sahip oldukları bu kavram yanılgıları ve ilişkilendirmede yaşadıkları güçlükler Çetin, Dane ve Bekdemir'in (2012) çalışmasındaki sonuçlar ile benzerlik göstermektedir. Baki (2008) çoğu öğrencinin bir fonksiyonun bir noktada tanımlı olması o noktada limiti olması yani bir değer bulma işlemi olarak algılaması yönündeki tespiti de, bu çalışma sonuçlarıyla aynı doğrultudadır. Tall (1992) analiz kavramlarının öğrenimindeki temel zorlukların limit kavramıyla ilişkili olduğunu, Cornu (1991) limit kavramındaki zorlukların kavramın barındırdığı zenginlik ve karmaşıklıktan kaynaklandığını belirmektedir. Matematiksel kavramların diğer disiplinlere göre daha fazla soyut içerikli olması (Dienes, 1971) da, bu zorlukların artmasına neden olmaktadır. Bu değerlendirme ışığında komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının öğretmen adayları tarafından soyut ve anlaşılması zor olarak algılanması Tall (1992) ve Cornu'nun (1991) yaptıkları çalışmalarındaki limit kavramındaki zorluk tespitleri ile örtüşmektedir. Bu zorlukların üstesinden gelemeyen öğrencilere kavramsal bir öğrenme ortamı sağlanmadığında bu kavramları öğrenciler sınavlar için ezberlemeyi tercih etmekte ve sınav sonrasında unutmaktadırlar. Öğretmen adaylarından ÖA9 bu kavramların gerçek anlamda öğrenilmesinin gerekli olduğu, kavramların öneminin kendilerine fark ettirilmesi ve ezberin ön planda olmaması gerektiği yönündeki görüşleri bunu desteklemektedir.

GeoGebra yazılımı ile dinamik bir öğrenme ortamında ele alınan komşuluk ve yığılma noktası kavramları öğretmen adayları tarafından doğru bir şekilde tanımlandığı, bu kavramları kendi aralarında ve limit ile olan ilişkisini açıklayabildikleri belirlenmiştir. ÖA3, ÖA13 ve ÖA15 komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını GeoGebra'da inşa ettikleri için kavramları daha iyi anladıkları ve kavramlar arasındaki ilişkiyi açıklayabildikleri yönündeki görüşler dikkate alındığında GeoGebra yazılımıyla kavramları dinamik ortamda oluşturmak soyut olan tanımların açıklanmasını ve anlaşılmasını olumlu yönde desteklemektedir. Furner ve Marinas (2013) GeoGebra yazılımının öğrencileri soyut matematiksel kavramlara hazırladığı ve kavramlar arasındaki ilişkinin keşfedilmesini desteklediği yönündeki bulgusu bu çalışmanın sonuçlarıyla aynı doğrultudadır. Dikovic (2009b) yığılma noktası, limit ve türev gibi kavramları içeren çalışmasında GeoGebra yazılımının bu tür analiz kavramlarının keşfedilmesine ve kavramların farklı temsilleri arasında bağlantı kurulmasına yardımcı olduğu bulgusu bu çalışmanın sonuçlarını desteklemektedir. ÖA12 ve ÖA14'ün uygulama sonrası kavramların tanımı ve arasında ilişkiyi açıklamada kavrama ait sembol ve terimleri doğru kullandıkları bulgusu kavramların dinamik ortamda inşa edilmesinin matematiksel terminolojiyi kullanmaya olumlu yönde katkısının olduğunu göstermektedir. Böylece öğretmen adaylarının sınıf ortamında matematiksel dili doğru ve etkin kullanabilir ve kavramların inşa adımlarında bu terimleri kullandıkça öğrenme ortamına matematiksel iletişimin doğru yansıması sağlanabilir. GeoGebra yazılımı sayesinde komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını anlamada ve ifade etmede daha iyi bir düzeye geldiğini savunan ÖA10'un görüşleri kavramların GeoGebra'da inşa edilmesinin tanımlardaki sembol ve terimlerin doğru bir şekilde ifade edilmesini desteklediği fikriyle örtüşmektedir. Faggiano ve Ronchi'nin (2011) çalışmasındaki GeoGebra yazılımının matematiksel kavramların dinamik ortamda inşa edilmesini destekleyerek kavramlar hakkında nedensel açıklamayı ve anlamlı öğrenme ortamlarının oluşmasını teşvik ettiği bulgusu bu çalışmanın sonucuyla benzerlik göstermektedir. ÖA1, ÖA3 ve ÖA15'in uygulama sonrasındaki kavramların inşa edilmesine yönelik görüşleri de bu sonucu desteklemektedir. Ayrıca komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının dinamik ortamda inşa edilerek keşfedilmesi kavramları daha somut hale dönüştürerek kalıcı olmasını sağlamaktadır. ÖA4, ÖA5, ÖA9 ve ÖA10'un uygulama sonrası görüşleri bu düşünceyi desteklemektedir. Kavramların GeoGebra yazılımında hazır materyaller üzerinde incelenmesi de her ne kadar anlamlı matematiksel öğrenmenin sınıf ortamına taşınmasını desteklese de yazılımda kavramların inşa edilmesi komşuluk ve yığılma noktası gibi soyut kavramların daha kolay ve eksiksiz bir şekilde öğrenilmesini sağlayabilir. Nitekim ÖA15'in komşuluk ve yığılma noktası gibi kavramların inşa edilmesi kavramların öğrenilmesini kolaylaştırdığı yönündeki görüşü kavramların inşa edilmesinin öğrenme ortamına daha fazla katkı sağlayabileceği yönündeki fikri desteklemektedir. Ayrıca, kavramların inşa edilerek öğrenilmesi sürecinde öğretmen adaylarının kavramların kalıcılığının arttığı yönündeki görüşleri ile Zengin'in (2015) çalışmasındaki GeoGebra yazılımının kalıcılığı artırdığı sonucuyla aynı doğrultudadır.

Jaworski ve Matthews (2011), Jaworski, Robinson, Matthews ve Croft (2012) ve Donevska-Todorova (2015) çalışmalarında GeoGebra yazılımının kavramsal öğrenme süreçlerini desteklediğini belirtmişlerdir. Bu araştırmalardan elde edilen bu sonuç, bu çalışmadaki GeoGebra yazılımının öğretmen adaylarının kavramsal öğrenmelerine katkı sağladığı bulgusu bu çalışma sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir. GeoGebra yazılımı komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının hangi alt parçalardan nasıl oluştuğunu ve hangi kavramlarda nasıl bir rol oynadığını dinamik bir şekilde çoklu gösterim imkânı sunarak öğretmen adaylarına neyin nereden geldiğini görmelerini sağlamıştır. Nitekim ÖA12'nin uygulama sonrasındaki kavramsal öğrenmeye ilişkin görüşü de bu değerlendirmeyi desteklemektedir. ÖA7 ise, GeoGebra yazılımı ile kavramlarda sorun yaşadıkları alt kavramların nereden geldiğini incelerken matematiksel ilişkileri görebildiklerini ve dinamik ortamın sunduğu farklı açılardan çok sayıda deneyimlerin kavramlar hakkında genellemelere varmalarına yardımcı olduğunu vurgulamıştır. Baki (2008) kavramsal bilginin oluşmasında kavramlar arasındaki karşılıklı geçişlerin ve ilişkilerin önemli olduğunu belirtmektedir. Bu değerlendirme ışığında, GeoGebra yazılımının da kavramlar arasında ilişkileri dinamik ortamda sağlayarak öğretmen adaylarının kavramsal öğrenmelerini desteklediği belirlenmiştir.

## Sonuç ve Öneriler

Komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının dinamik matematik ortamında keşfedilmesini öğretmen adaylarının görüşleri doğrultusunda incelemeyi hedefleyen bu çalışmada, toplam 10 ders saati boyunca komşuluk ve yığılma noktası kavramları GeoGebra yazılımıyla dinamik bir ortamda ele alınmadan önce öğretmen adaylarının bu kavramlara ait ön öğrenmeleri ve görüşleri incelenmiştir. Araştırma kapsamında yapılan incelemelerde, öğretmen adaylarının komşuluk ve yığılma noktası kavramlarına ait tanımlamalarda ve kavramlar arasında ilişki kurmada zorlandıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adayları önemsiz, soyut ve zor olarak gördükleri komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını ezberleyerek öğrendiklerini ve bu kavramlara yönelik kaygılarının olduğunu belirtmişlerdir. Ancak komşuluk ve yığılma noktası kavramları GeoGebra yazılımıyla dinamik bir ortamda incelendikten sonra, öğretmen adaylarının komşuluk ve yığılma noktası kavramlarını tanımlayabilmede ve kavramlar arasında ilişkiyi kurmada zorlanmadıkları belirlenmiştir. Özellikle komşuluk ve yığılma noktası gibi kavram yanılgılarının ve zorlukların yoğun olarak yaşandığı bu kavramların, dinamik bir ortamda inşa edilmesi ve uygulama fırsatının oluşmasıyla bu kavramlara yönelik kalıcı ve kavramsal bir öğrenmenin gerçekleşmesi sağlanmaktadır. Bu öğrenme ortamında gerçekleştirilen uygulamadan önce öğretmen adaylarının soyut ve zor olarak gördükleri komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının uygulama sürecinde somutlaştırıldığı ve matematiksel iletişimin sağlandığı öğretmen adayları tarafından ortaya konulmuştur. Bu değerlendirme ışığında, analiz kavramlarının öğrenciler tarafından daha iyi anlaşılabilmesi, tanımların içselleştirilebilmesi, kavramlar arasında ilişkilerin kurulabilmesi ve kavram bilgisinin oluşabilmesi için GeoGebra yazılımında bu kavramların inşa edilmesi sağlanmalıdır. Limit ve dizilerde limit kavramları analiz derslerinde ele alınmadan önce komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının GeoGebra yazılımında inşa edilmesi de kavramlar arasındaki ilişkilerin sağlıklı bir şekilde kurulmasını sağlayabilir. Komşuluk, yığılma noktası, limit ve dizilerde limit gibi analizin önemli kavramları ile ilgili dinamik inşalar oluşturulurken adım sayısı fazla olmayan dinamik yapılar inşa ettirilmeli ve inşa sürecinde öğrencilerin birbirleriyle yardımlaşmaları sağlanmalıdır. İşbirlikli metotlardan içeriğe uygun olarak formal veya informal teknikler kullanılarak matematiksel iletişim ve yazılım kullanımı desteklenmelidir. Analiz kavramlarının GeoGebra yazılımında inşa edilmesi sürecinde, öğretmenin rehberliği ve yazılımda zorlanılan kısımlarda yönlendirici olma rolünü iyi bir şekilde üstlenebilmesi için GeoGebra yazılımında bu kavramlarla ilgili hazır materyal kullanmak yerine kendi materyallerini oluşturması gerekmektedir.

## Kaynakça

Adams, R. A., & Essex, C. (2010). *Calculus: a complete course* (7th ed.). Toronto: Pearson.

Baki, A. (2002). *Öğrenen ve öğretenler için bilgisayar destekli matematik* (1. bs.). İstanbul: Ceren Yayın Dağıtım.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (4. bs.). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Baş, F., Çakmak, Z., Işık, A. ve Bekdemir, M. (2015). Öğretim elemanları ile öğrencilerin derste oluşturduğu tanımlar arasındaki farklar ve sebepleri. *İlköğretim Online, 14*(4), 1276-1289.

Bayraktar, M. (2007). *Analize giriş I diferansiyel hesap* (2. bs.). Ankara: Grafiker Yayıncılık.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Creswell, J. W. (2012). *Educational research planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research* (4 th ed.). Boston, MA: Pearson Education, Inc.

Çepni, S. (2014). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş* (7. bs.). Trabzon: Celepler Matbaacılık.

Çetin, Ö.F., Dane, A. ve Bekdemir, M. (2012). Yığılma noktası kavramı ve kullanımı. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 6*(2), 217-233.

Dane, A., Çetin, Ö. F., Baş, F. ve Özturan Sağırlı, M. (2016). A Conceptual and procedural research on the hierarchical structure of mathematics emerging in the minds of university students: An example of limit-continuity-integral-derivative. *International Journal of Higher Education, 5*(2), 82-91.

Dienes, Z. P. (1971). An example of the passage from the concrete to the manipulation of formal systems. *Educational Studies in Mathematics*, *3*(3), 337-352.

Dikovic, L. (2009a). Implementing dynamic mathematics resources with GeoGebra at the college level. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET), 4*(3), 51-54.

Dikovic, L. (2009b). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, *6*(2), 191-203.

Donevska-Todorova, A. (2015). Conceptual understanding of dot product of vectors in a dynamic geometry environment. *The Electronic Journal of Mathematics & Technology 9*(3), 192-209.

Engelbrecht, J. (2010). Adding structure to the transition process to advanced mathematical activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(2), 143-154.

Faggiano, E., & Ronchi, P. (2011). GeoGebra as a methodological resource: Guiding teachers to use GeoGebra for the construction of mathematical knowledge. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-centered learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 183-189). Rotterdam: Sense Publishers.

Furner, J. M., & Marinas, C. A. (2013). Learning math concepts in your environment using photography and GeoGebra. *Electronic Proceedings of the Twenty-fifth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* Boston, Massachusetts.

GeoGebra [Bilgisayar yazılımı]. Linz, Austria: International GeoGebra Institute. https://www.geogebra.org/

Hohenwarter, J., & Hohenwarter, M. (2013). *Introduction to GeoGebra 4.4*. Available from: http://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Creating mathlets with open source tools. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications. 7*, 1-29.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. In *11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico.

Jaworski, B., & Matthews, J. (2011). Developing teaching of mathematics to first year engineering students. *Teaching Mathematics and its Applications, 30*, 178–185.

Jaworski, B., Robinson, C., Matthews, J., & Croft, A. C. (2012). An activity theory analysis of teaching goals versus student epistemological positions. *International Journal of Technology in Mathematics Education, 19*(4), 147–152.

Kabael, T., Barak, B. ve Özdaş, A. (2015). Öğrencilerin limit kavramına yönelik kavram imajları ve kavram tanımları. *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, *5*(1), 88-114.

Kadıoğlu, E. ve Kamali, M. (2011). *Genel matematik*. Erzurum: Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi.

Liang, S. (2016). Teaching the concept of limit by using conceptual conflict strategy and Desmos graphing calculator. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 2*(1), 35-48.

Little, C. (2011). Approaches to calculus using GeoGebra. In L. Bu and R. Schoen (Eds.), *Model-centered learning pathways to mathematical understanding using GeoGebra*(pp. 191-204). Sense Publishers, Rotterdam.

Mamona-Downs, J. (2010). On introducing a set perspective in the learning of limits of real sequences. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 277-291.

McMillan, J., & Schumacher, S. (2010). *Research in education: Evidence-based inquiry (7th ed.).* Boston, MA: Pearson.

Przenioslo, M. (2003). Perceiving the concept of limit by secondary school pupils. *Disputationes Scientificae Universitatis Catholicae Ruzomberok*, *3*, 75–84.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*(1), 103-132.

Robert, A., & Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of calculus/elementary analysis. *In the teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 283-299). Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Tall, D. (1991). Intuition and rigor: The role of visualization in the calculus. In W. Zimmermann and S. Cunningham (Eds), *Visualization in Teaching and Learning Mathematic* (pp 105-119). Mathematical Association of America, Washington, DC.

Tall, D. (1992, August). Students difficulties in calculus. In in M. Artigue and G. Ervynck (Eds.), *Proceeding of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus* (pp. 13-28), ICME-7. Québec, Canada.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

Türkdoğan, A., Güler, M., Bülbül, B. Ö., & Danişman, Ş. (2015). Türkiye'de matematik eğitiminde kavram yanılgılarıyla ilgili çalışmalar: Tematik bir inceleme. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 11*(2), 215-236.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (8. bs.). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zengin, Y. (2015). *Dinamik matematik yazılımı destekli işbirlikli öğrenme modelinin ortaöğretim cebir konularının öğrenimi ve öğretiminde uygulanabilirliğinin incelenmesi*. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

## Extended Abstract

### Purpose

It was observed that the students' knowledge was lacking and weak in defining the concept of limit in which misconceptions and learning difficulties were extensively experienced. Most of the reasons for the students' learning difficulties and misconceptions were related to the concept of limit as the accumulation point. Thus, it has been determined that the teaching and learning of accumulation point must not be ignored in order to eliminate these difficulties and misconceptions related to the concept of limit. Similarly, the concepts of neighborhood and deleted neighborhood are important concepts for the definition of limit. While many students applied the definition of the limit concept, they forget that the point of limit is just an accumulation point. If students do not learn this concept permanently and conceptually, it may have a negative effect on their understanding not only of limit but also of limit in sequences. Therefore, alternative ways demonstrating how to build neighborhood and accumulation point conceptually in the learning environment can make contributions to calculus and analysis courses.

Dynamic visuals provided by mathematics software support the discussions about mathematics experiments, relations between the symbolic and graphical representations, basic concepts, and hypotheses in the teaching of calculus. GeoGebra, a dynamic mathematics software, has been used for discussing the concepts of neighborhood and accumulation point as it facilitates the formation of these dynamic processes, it supports the Turkish syllabus, it is free and it is easily installed and used in many platforms.

The concepts of neighborhood and accumulation point play a key role for understanding the basic concepts in calculus. Without understanding these concepts, students will be ill equipped to effectively learn both the limit of function and the limit of the sequence. For that reason, it is very important to find alternative ways of learning and teaching the concepts of neighborhood and accumulation point which constitute a significant part of the conceptual understanding of limit and the limit of the sequence. With alternative ways, students have various chances to construct and explore the concepts of neighborhood and accumulation point. One of the alternative ways is by using the dynamic mathematics software, GeoGebra, in the conceptual and explorative learning environments. Although, the concepts of neighborhood and accumulation point are the most important components of analysis courses, there are limited studies that focus on the learning and teaching these important concepts. For that reason, the purpose of this study was to investigate the concepts of

neighborhood and accumulation point in a dynamic mathematics environment using pre-service teachers' views. Accordingly, this study sought answers to the following two research questions:

1. Before the implementation of the exploration of the concepts of neighborhood and accumulation point using GeoGebra software, what are the pre-service teachers' prior knowledge about these concepts and their views about the learning environment which involves these concepts?

2. After the exploration of the concepts of neighborhood and accumulation point in the dynamic learning environment, what is pre-service teachers' knowledge structure about these concepts and what are their views about the dynamic learning environment?

As the concepts of neighborhood and accumulation point are neglected in undergraduate mathematics education research, and there are limited studies about learning and teaching these concepts, the findings of this study may contribute to the literature of undergraduate mathematics education.

**Method**

In this study, as the researcher aimed to explore the concepts of neighborhood and accumulation point in-depth in a dynamic mathematics environment by considering pre-service teachers' views, the qualitative research approach was adopted. The participants of the study were 15 pre-service mathematics teachers. Two questionnaires consisting of open-ended questions were used as data collection tools. The participants were asked eight open-ended questions related to their prior knowledge about neighborhood and accumulation point and views about the environment where these concepts were taught before the intervention in a dynamic learning environment provided by GeoGebra. Throughout 10 course hours (two and a half weeks), the concepts of neighborhood, accumulation point and the definition of limit were taught in a dynamic learning environment using GeoGebra. At the end of this implementation process, the pre-service teachers were asked 11 open-ended questions about their knowledge related to the concepts of neighborhood and accumulation point and their views about the dynamic learning environment where these concepts were taught. Descriptive analysis was used to analyze the data obtained before and after the implementation. The aim was to establish a relationship between the data obtained by descriptive analysis and to organize the data logically by conceptualizing them.

## Findings and Discussion

Before the concepts of neighborhood and accumulation point were handled in the dynamic learning environment with GeoGebra software, it was found that the pre-service teachers described these concepts incorrectly. In addition, they did not make connections between the concepts of neighborhood and accumulation point, and they did not make connections between these concepts and limit. The pre-service teachers stated that if limit exists, it must be defined at a point. Thus, they did not make connections between the calculation of limit and accumulation point. Before the implementation, it was found that the pre-service mathematics teachers had misunderstandings about the definition of a limit, and the accumulation point. The results about both the misunderstandings which pre-service teachers had about the concepts of accumulation point (limit point) and the learning difficulties about making connections between these concepts were similar to the results in the literature. After the concepts of neighborhood and accumulation point, and the definition of limit was introduced in dynamic learning environment using GeoGebra software, it was found that the pre-service mathematics teachers defined these concepts accurately. It was also found that they could make connections between these concepts and the definition of limit. Based on the views of ÖA3, ÖA13, and ÖA15, they stated that GeoGebra software enabled them to build the concepts of neighborhood and accumulation point in the dynamic learning environment. Thus, they expressed that building new knowledge and connections in the dynamic learning environment gave them a better understanding of these concepts. Additionally, these opportunities enabled them to explain the abstract relations about these concepts. Considering the views of ÖA12, and ÖA14, it was found that when they explained the definitions of the concepts and stated the connections between these concepts, they could use mathematical terminology and symbols correctly. These views showed that building neighborhood, accumulation point, and the definition of limit in a dynamic environment contributed to the correct use of mathematical language. With the help of GeoGebra software, the pre-service teachers had opportunities to share ideas and make dynamic constructions. GeoGebra software provided them with opportunities to use terms and symbols about the concepts of neighborhood and accumulation point. Especially, they could use the navigation bar to review their construction step by step. The views of ÖA1, ÖA3, and ÖA15 on building these concepts supported these findings. In addition, these concepts were more concrete and the learning became more permanent as a result of their building new knowledge in an explorative learning environment. The views of ÖA4, ÖA5, ÖA9 and ÖA10 supported this conclusion. Although GeoGebra software supported meaningful learning about the concepts of neighborhood and accumulation point with the use of a model, building dynamic constructions provided good opportunities to the pre-service teachers to facilitate learning. The views of ÖA15 on building the concepts of neighborhood and accumulation point in the GeoGebra software supported this argument. In addition, GeoGebra software enabled them to examine subunits of neighborhood, accumulation point, and limit. Multiple representations of these concepts in dynamic constructions facilitated reasoning. The views of ÖA12 about the conceptual learning with GeoGebra software supported this conclusion. ÖA7 stated that when he examined subunits of neighborhood and accumulation point in the dynamic learning environment, he could see mathematical connections and experienced different perspectives in the dynamic constructions. These experiences also helped him to make generalizations about these concepts. In the light of this assessment, building dynamic constructions with GeoGebra software supported conceptual understanding in the learning of the concepts of neighborhood and accumulation point.

**Conclusions and Suggestions**

Considering the findings obtained before the intervention, it was found that the pre-service teachers defined the concepts of neighbourhood and accumulation point incorrectly and they didn’t make connections between the concepts. In addition, they had difficulties in understandings the concepts of neighbourhood and accumulation point. After the implementation, it was found that the pre-service teachers defined the concepts of neighbourhood and accumulation point correctly. They also made connections between the concepts of neighbourhood and accumulation point. The dynamic mathematics environment with GeoGebra provided them with opportunities to construct dynamic models about these concepts. In this way, they had opportunities to concretize abstract concepts in calculus. In addition, it was determined that permanent and conceptual learning was provided by constructing the concepts of neighbourhood and accumulation point using GeoGebra software. In this dynamic environment, dynamic constructions that were built by the pre-service teachers aided permanent learning. Moreover, they had opportunities to practice these concepts. In this way, they explored the concepts in the experimental environment and improved mathematical communication skills. As a result, it was found that the dynamic mathematics software, GeoGebra, contributed to their exploration of the concepts of neighbourhood and accumulation point. Based on these evaluations, before the limit of the sequence and the definition of limit are introduced in mathematics courses, it is suggested that learners should build the concepts of neighbourhood and accumulation point in the dynamic mathematics software. In this process, the number of the construction steps should be noted. When these concepts are handled with GeoGebra software, the learning environment should be designed by using formal or informal cooperative techniques.