МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА

Куттыкожаева Ш.Н., Исабекова Н.А., Гусманова Ф.Р.
Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова,
Кокшетау, Казахстан
E-mail: vestnik_kaznpru@mail.ru
Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
Алматы, Казахстан
E-mail: vestnik_kaznpru@mail.ru

Аннотация

В работе изучаются варианты метода фиктивных областей для нелинейной модели океана. Исследованы теорема существования и сходимости решения приближенных моделей, полученных с помощью метода фиктивных областей. Выведена неулучшаемая оценка скорости сходимости решения метода фиктивных областей.

Ключевые слова: метод фиктивных областей, нелинейная модель океана.

THE METHOD OF FICTITIONS DOMAINS FOR NONLINEAR OCEAN MODELS

Abstract

The versions of fictitious domains method for non-linear ocean model are studied. The theorems of existence and convergence for the auxiliary problem of the fictitious domains method are proved. The non-improved convergence speed estimation has been obtained.

Key words: fictitious domains method, non-linear ocean model.

Нестационарная линейная задача течения в океане в области $\Omega_T = (0,T)\times\Omega$, $\Omega = (0,H)\times\Omega_1$, $\Omega_1 \subset R^2$ сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений [1].

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_3^2} + \mu \Delta \upsilon - l \times \upsilon - \hat{\nabla} \xi + f, \tag{1}$$

$$\int_0^H d\hat{i}v \upsilon^\varepsilon dx_3 = \int_0^H (\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_3}) dx_3 = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x_3} = 0, \quad \int_\Omega \xi dx = 0, \tag{2}$$

с начально-краевыми условиями

$$\upsilon\big|_{x_3=0} = 0, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H} = 0, \quad \upsilon\big|_{t=0} = \upsilon_0(x), \tag{3}$$

где $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2), \quad \nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}),$

$$\upsilon\big|_\gamma = 0, \quad \gamma - \textit{боковая} \quad \textit{граница} \quad \textit{области} \quad \Omega. \tag{4}$$

Задачу (1)-(4) решаем методом фиктивных областей [2], [3]. Согласно методу фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам во вспомогательной области
$D_T = (0,T) \times D, \quad D = (0,H) \times (\Omega_1 \cup \Omega_0) = \Omega \cup D_0$, строго содержащей в себе Ω с боковой границей Γ, решаем систему уравнений с малым параметром

$$\frac{\partial \upsilon^\varepsilon}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 \upsilon^\varepsilon}{\partial x_3^2} + \mu \Delta \upsilon^\varepsilon - l \times \upsilon^\varepsilon - \hat{\nabla} \xi^\varepsilon + f - \frac{\xi_0(x)}{\varepsilon} \upsilon^\varepsilon, \tag{5}$$

$$\int_0^H d\hat{i}v \upsilon^\varepsilon dx_3 = 0, \quad \frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x_3} = 0, \quad \int_D \xi dx = 0, \tag{6}$$

$$\upsilon^\varepsilon\big|_{t=0} = \upsilon_0(x), \tag{7}$$

$$\upsilon^\varepsilon\big|_{x_3=0} = 0, \quad \frac{\partial \upsilon^\varepsilon}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H} = 0, \quad \upsilon^\varepsilon\big|_\Gamma = 0, \tag{8}$$

где $\xi_0(x) = \begin{cases} 0, x \in \Omega, \\ 1, x \in D_0. \end{cases}$

Методы получения неулучшаемой оценки скорости сходимости методом фиктивных областей для линейных параболических уравнений [4] для данных систем непригодны. В данной работе предлагается новый подход для получения точной оценки погрешности между решениями задачи и приближенного решения, полученного методом фиктивных областей.

В дальнейшем через C - будем обозначать различные постоянные, зависящие от данных задачи и постоянных теоремы вложения, но не зависящие от малого параметра ε. Будем использовать обозначения пространств из работы [5].

Введем пространства

$$C(D)=\left\{\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in C^2(D),\quad \int_\partial^H d\hat{i}v\varphi dx_3=0,\quad \varphi|_\Gamma=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H}=0,\quad \varphi|_{x_3=0}=0.\right\}$$

Замыкания $C(D)$ - в нормах пространств $L_2(D),\ W_2^1(D),\ W_2^2(D)$ обозначим через $V_0(D),\ V_1(D),\ V_2(D)$ соответственно.

Определение. *Сильным решением задачи (5)-(8) называется функция* $\upsilon^\varepsilon\in L_2(0,T;V_2(D)),\quad \nabla\xi^\varepsilon\in L_2(0,T;L_2(D)),\quad \upsilon_t^\varepsilon\in L_2(0,T;L_2(D))$, *удовлетворяющая уравнению (5)-(6) и начально-граничным условиям (7), (8) почти всюду в соответствующей мере.*

Продолжим нулем вне Ω функцию $\upsilon_0(x),\ f(x,t)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f(x,t)\in L_2(0,T;L_2(D)),\quad \upsilon_0(x)\in V_1(D),\quad \gamma\in C^2$. *Тогда существует единственное сильное решение задачи (5)-(8) и для решения справедлива оценка*

$$\left\|\upsilon_t^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T;L_2(D))}+\left\|\upsilon^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T;V_2(D))}+\left\|\nabla\xi^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T;L_2(D))}\le C_\varepsilon, \tag{9}$$

$$\left\|\upsilon^\varepsilon-\upsilon\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\le C\sqrt{\varepsilon}, \tag{10}$$

где $C_\varepsilon\to\infty,\quad \varepsilon\to 0,\quad \upsilon$ *- является решением задач (1)-(3). Оценка (10) – неулучшаемая по порядку* ε.

Метод фиктивных областей с продолжением по старшему коэффициенту

Метод фиктивных областей для задачи (1)-(3) с продолжением по старшим коэффициентам сводятся к решению системы дифференциальных уравнений в области D_T.

$$\frac{\partial\upsilon^\varepsilon}{\partial t}=\mu_0\frac{\partial^2\upsilon^\varepsilon}{\partial x_3^2}+d\hat{i}v(\mu^\varepsilon\hat{\nabla}\upsilon^\varepsilon-\delta\xi^\varepsilon)-l\times\upsilon^\varepsilon+f, \tag{11}$$

$$\int_0^H d\hat{iv}\,\upsilon^\varepsilon dx_3 = 0, \tag{12}$$

Систему (11), (12) решаем с условиями

$$\upsilon^\varepsilon\big|_{t=0} = \upsilon_0(x), \quad x \in D, \quad \upsilon^\varepsilon\big|_\Gamma = 0, \quad t \in (0,T), \tag{13}$$

и условиями согласованиями

$$\left[\upsilon^\varepsilon\right]_\gamma = 0, \quad \left[\mu^\varepsilon \frac{\partial \upsilon^\varepsilon}{\partial n} - \delta \xi^\varepsilon\right]_\gamma = 0, \quad t \in (0,T), \tag{14}$$

где δ - метрический тензор, $\mu^\varepsilon = \begin{cases} \mu, x \in \Omega, \\ \dfrac{\mu}{\varepsilon}, x \in D_0 \end{cases}$,

$[\cdot]_\gamma$ -означает скачок функции на границе γ . Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\upsilon_0(x) \in V_1(D)$, $f \in L_2(0,T;L_2(D))$, $\gamma \in C^2$. *Тогда существует единственное сильное решение задач (11)-(14) и для решения справедливы оценки*

$$\left\|\frac{\partial \upsilon^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;L_2(D))} + \left\|\upsilon^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T;V_1(D))} + \left\|\upsilon^\varepsilon_{x_3x_3}\right\|_{L_2(0,T;L_2(D))} \le C < \infty,$$

$$\begin{aligned} &\left\|\upsilon^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\left\|\upsilon^\varepsilon_{x_2x_2}\right\|_{L_2(0,T;L_2(D_0))} + \left\|\upsilon^\varepsilon_{x_1x_1}\right\|_{L_2(0,T;L_2(D_0))}\right) + \left\|\hat{\nabla}\xi^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \\ &\quad + \left\|\hat{\nabla}\xi^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T;L_2(D_0))} + \left\|\xi^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T;L_2(D))} \le C\left(\left\|\upsilon_0\right\|_{V_1(D)} + \left\|f\right\|_{L_2(0,T,L_2(D))}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\left\|\upsilon^\varepsilon - \upsilon\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \le C\varepsilon, . \tag{16}$$

где при $\varepsilon \to 0$ *сильное решение задачи (11)-(14) сходится к сильному решению задач (1)-(3).*

Оценка близости решения (16) неулучшаемая по порядку ε.

Математическое моделирование краевых условий океанологии с помощью метода фиктивных областей

В системах (1), (2) в физических постановках отсутствует граничные условия для функции $\xi(x_1, x_2, t)$ (уровень воды). Этот факт в значительной степени затрудняет создание эффективного численного алгоритма. Далее предлагаем вариант метода фиктивных областей для нелинейной стационарной задачи, где можно поставить граничные условия для функции $\xi(t, x_1, x_2)$.

Рассмотрим систему нелинейной стационарной модели океана

$$(\vec{\upsilon} \cdot \nabla)\upsilon = \mu_0 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_3^2} + \mu \Delta \upsilon - l \times \upsilon - \hat{\nabla}\xi + f,$$
$$\int_0^H d\,\hat{w}\,\upsilon dx_3 = 0, \frac{\partial \xi}{\partial x_3} = 0, \tag{17}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H} = 0, \quad \upsilon\Big|_{x_3=0} = 0, \quad \upsilon\Big|_{\gamma} = 0, \tag{18}$$

где $\vec{\upsilon} = (\upsilon_1, \upsilon_2, -\int_0^{x_3} d\,\hat{i}v\,\upsilon dx_3).$

Для задачи (17), (18) в соответствии с методом фиктивных областей сформируем вспомогательную задачу. Предположим, что область $\overline{D} = [0,1] \times [0,1] \times [0, H]$ прямоугольный параллелепипед.

$$(\vec{\upsilon}\nabla)\upsilon^{\varepsilon} = \mu_0 \frac{\partial^2 \upsilon^{\varepsilon}}{\partial x_3^2} + \mu \Delta \upsilon^{\varepsilon} - l \times \upsilon^{\varepsilon} - \hat{\nabla}\xi^{\varepsilon} - \frac{\xi_0(x)}{\varepsilon}\upsilon^{\varepsilon} + f, \tag{19}$$

$$\int_0^H d\,\hat{i}v\,\upsilon^{\varepsilon} dx_3 = 0, \quad \frac{\partial \xi^{\varepsilon}}{\partial x_3} = 0. \tag{20}$$

По переменным x_1, x_2 - поставим условия периодичности для функций $\xi^{\varepsilon}, \upsilon^{\varepsilon}$

$$\frac{\partial^k \xi^{\varepsilon}}{\partial x_i^k}\Big|_{x_i=0} = \frac{\partial^k \xi^{\varepsilon}}{\partial x_i^k}\Big|_{x_i=1}, \quad k = 0,1, \quad i = 1,2, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^k \upsilon}{\partial x_i^k}\Big|_{x_i=0} = \frac{\partial^k \upsilon^{\varepsilon}}{\partial x_i^k}\Big|_{x_i=1}, \quad k = 0,1, \quad i = 1,2, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \upsilon^{\varepsilon}}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H}=0,\quad \upsilon^{\varepsilon}\Big|_{x_3=0}=0. \tag{23}$$

Относительно разрешимости задач имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $f\in L_2(D),\ \ \gamma\in C^2$. *То существует хотя бы одно сильное решение задач (19)-(23) и для решения справедливы оценки*

$$\left\|\upsilon^{\varepsilon}\right\|_{V_1(D)}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left\|\upsilon^{\varepsilon}\right\|_{L_2(D_0)}\le C\left\|f\right\|_{L_2(D)},$$

$$\left\|\upsilon^{\varepsilon}\right\|_{W_2^2(D)\cap V_1(D)}\le C_{\varepsilon}\left\|f\right\|_{L_2(D)},$$

$$\left\|\upsilon-\upsilon^{\varepsilon}\right\|_{L_2(\Omega)}\le C\sqrt{\varepsilon},\quad \textit{при}\quad \textit{малом}\quad \left\|f\right\|_{L_2(D)}, \tag{24}$$

где υ *- является решением задач (17)-(18)* $C_{\varepsilon}\to\infty$ *при* $\varepsilon\to 0$.

Заметим, что при численном решении относительно ξ^{ε} - получаем уравнения Пуассона с разрывными коэффициентами, зависящими от малого параметра. Здесь можно применить итерационные методы, предложенные в работе [2], в которых скорости сходимости не зависят от изменения малого параметра ε. Аналогично можно исследовать метод фиктивных областей с продолжением по старшему коэффициенту с граничными условиями (21)-(23). Получена точная оценка скорости сходимости

$$\left\|\upsilon^{\varepsilon}-\upsilon\right\|_{L_2(\Omega)}\le C\varepsilon. \tag{25}$$

Наконец, рассмотрим математическое моделирование краевых условий методом фиктивных областей для нестационарных уравнения океанологии

$$\frac{\partial \upsilon^{\varepsilon}}{\partial t}+(\vec{\upsilon}^{\varepsilon}\nabla)\upsilon^{\varepsilon}=\mu_0\frac{\partial^2\upsilon^{\varepsilon}}{\partial x_3^3}+\mu\Delta\upsilon^{\varepsilon}-\hat{\nabla}\xi+f-\frac{\xi_0(x)\upsilon^{\varepsilon}}{\varepsilon},\quad \int_0^H d\hat{i}v\upsilon^{\varepsilon}dx_3=0, \tag{26}$$

с граничными условиями (21), (22) и

$$\upsilon^{\varepsilon}\Big|_{t=0}=\upsilon_0,\quad \upsilon^{\varepsilon}\Big|_{x_3=0}=0,\quad \frac{\partial \upsilon^{\varepsilon}}{\partial x_3}\Big|_{x_3=H}=0. \tag{27}$$

Определение. Обобщенным решением задач (26), (27) и (21), (22) называется вектор-функция $\upsilon^{\varepsilon}\in L_2(0,T;V_1(D))\cap L_{\infty}(0,T;V_0(D))$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_0^T \Big[(\upsilon^\varepsilon, \psi_t + (\vec{\upsilon}^\varepsilon \nabla)\psi, \upsilon^\varepsilon)_D - \mu_0(\upsilon^\varepsilon_{x3}, \psi_{3x})_D - \mu(\hat{\nabla}\upsilon^\varepsilon, \hat{\nabla}\psi)_D -$$

$$- (\frac{\xi_0(x)}{\varepsilon}\upsilon^\varepsilon, \psi)_D + (f, \psi) \Big] dt + (\upsilon_0, \psi(0))_D = 0,$$

для любой вектор функции $\psi \in C^1(0,T;V_2(D) \cap V_1(D)), \quad \psi(T) = 0.$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $f(x,t) \in L_2(0,T,L_2(D)), \quad \gamma \in C^2, \quad \upsilon_0(x) \in V_1(D)$. *Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задач (26), (27) и (21), (22) для решения справедлива оценка*

$$\|\upsilon^\varepsilon\|_{L\infty(0,T;L_2(D))} + \|\upsilon^\varepsilon\|_{L_2(0,T;V_1(D))} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|\upsilon^\varepsilon\|_{L_2(0,T;L_2(D))} \le C < \infty,$$

и обобщенное решение сходится к обобщенному решению нестационарной модели океана при $\varepsilon \to 0$ *со скоростью*

$$\|\upsilon^\varepsilon - \upsilon\|_{L_2(0,T,L_2(\Omega))} \le C\sqrt{\varepsilon}.$$

Литература

1. Кочергин В.П. Теория и метод расчета океанических течений. ВЦ СО АН СССР, «Наука», Новосибирск, 1978 г., 124 стр.

2. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей для задачи математической физики. Москва, изд. МГУ, 1991 г., 156 стр.

3. Смагулов Ш. Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнений Навье-Стокса. Новосибирск, 1976 г., Препринт ВЦ СО АН.

4. Конавалов А.Н.В кн. Численные методы механики сплошной среды. 1972 г., т. 3., №5.

5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. СО РАН, изд. «Наука», Новосибирск, 1983 г., 305 стр.