Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi
Dergi web sayfası: http://fbd.beun.edu.tr

Araştırma Makalesi
Geliş tarihi / Received : 13.03.2017
Kabul tarihi / Accepted : 25.04.2017

Değişken Katsayılı Ultrahiperbolik Denklemler için Bir Carleman Değerlendirmesi

A Carleman Estimate for Ultrahyperbolic Equations with Variable Coefficients

Fikret Gölgeleyen*, Özlem Kaytmaz

Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Zonguldak, Türkiye

Öz

Bu çalışmada, ilk olarak kısmi türevli denklemler için Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili literatürde mevcut olan başlıca çalışmalar ele alınmıştır. Daha sonra değişken katsayılı ultrahiperbolik denklemler için bir Carleman değerlendirmesi elde edilmiştir. Bu değerlendirmeler, ultrahiperbolik denklemler için ters problemlerin çözümlerinin tekliğinin ve kararlılığının araştırılmasında önemli bir araçtır.

Anahtar Kelimeler: Carleman değerlendirmesi, Cauchy problemi, Ultrahiperbolik denklem

Abstract

In this study, we first review some of the major results in the literature on the existence and uniqueness of the solution of Cauchy problem for partial differential equations. Next, we obtain a Carleman estimate for ultrahyperbolic equations with variable coefficients which is an important tool to study the uniqueness and stability in inverse problems for these equations.

Keywords: Carleman estimate, Cauchy problem, Ultrahyperbolic equation

1. Giriş

Bilindiği üzere analitik katsayılı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemleri için Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği, başlangıç verisinin analitik olması şartı altında ilk olarak 1842 yılında Augustin Cauchy ve daha genel olarak 1875 yılında Sophie Kowalevsky tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 1. (Cauchy-Kovalevsky Teoremi)

$u_1, u_2, \ldots, u_N$ bilinmeyen fonksiyonlar ve $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$ bağımsız değişkenler olmak üzere aşağıdaki denklem sistemini göz önüne alalım:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right), \tag{1}$$

$k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \le n_j,\ k_0 < n_j,\ (i, j = 1,2,\ldots,N),$

$$\left.\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\right|_{t=t_0} = \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n), (k = 0,1,2,\ldots,n_i - 1). \tag{2}$$

Eğer tüm F_i fonksiyonları $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots, \varphi^0_{j, k_0, k_1, \ldots, k_n}, \ldots)$ noktasının bir komşuluğunda analitik ve tüm $\varphi_j^{(k)}$ fonksiyonları da $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ noktasının bir komşuluğunda analitik ise bu durumda (1)-(2) Cauchy problemi $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ noktasının bir komşuluğunda analitik bir çözüme sahiptir ve bu çözüm analitik fonksiyonlar sınıfında tektir, (Petrovskii 1967).

(1)-(2) Cauchy problemine örnek olarak, verilen başlangıç koşullarından sonsuz homojen bir zarın titreşiminin belirlenmesi problemi, yani

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \tag{3}$$

denkleminin

$$u(t_0, x_1, x_2) = \varphi^{(0)}(x_1, x_2), u_t(t_0, x_1, x_2) = \varphi^{(1)}(x_1, x_2) \tag{4}$$

koşullarını sağlayan çözümünü bulma problemi verilebilir. Diğer taraftan Cauchy-Kovalevsky teoremi genel olarak (1)-(2) formunda olmayan sistemlere uygulanamaz. Bu durum için Kovalevsky tarafından aşağıdaki örnek verilmiştir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5}$$

denkleminin

*Sorumlu yazarın e-posta adresi: f.golgeleyen@beun.edu.tr

Fikret Gölgeleyen orcid.org/0000-0002-8059-2194
Özlem Kaytmaz orcid.org/0000-0003-0420-007X

$$u(0,x) = \frac{1}{1-x}, \; |x| < 1 \tag{6}$$

başlangıç koşulunu sağlayan bir $u(t,x)$ analitik çözümü varsa bu çözümün orijinin bir komşuluğunda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{t^n}{(1-x)^{2n+1}} \tag{7}$$

serisi ile temsil edilebilir olması gerekir. Ancak bu seri $t \neq 0$ için her noktada ıraksaktır.

20. yüzyıla gelindiğinde kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan en temel yöntem olarak kuvvet serilerine açılım yöntemi karşımıza çıkmaktadır. Bunun nedeni her realistik çözümün başlangıç noktasının/yüzeyinin bir komşuluğunda yakınsak bir kuvvet serisine açılabilir olması yani analitik olması gerektiği düşüncesiydi. Ancak zamanla bu bakış açısının matematiksel fiziğin problemleri için yetersiz kaldığı ve analitik olmayan çözümlerin de araştırılması gerektiği görülmüştür. Cauchy-Kovalevsky teoremi bir analitik Cauchy probleminin birden fazla analitik çözümü olamayacağını gösterir, analitik olmayan diğer çözümlerinin varlığı hakkında bir bilgi vermez. Bu durum ise lineer analitik denklemler için Holmgren Teoremi ile açıklığa kavuşturulmuştur.

Son yıllarda ters problemler ve kontrol teorisi gibi uygulamalı alanlardaki gelişmeler bu konuda yeni problemlerin ortaya çıkmasına neden olmuştur, (Gölgeleyen 2010, Yildiz vd. 2010). Kısmi diferensiyel denklemlerin çözümü için tek devam (unique continuation) özelliği bunlardan biridir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 1. (Tek Devam Özelliği)

$P(x,D)$ bir kısmi diferensiyel operatör ve S, Ω bölgesinde yönlendirilebilir bir hiperyüzey olsun. Eğer her bir $x_0 \in S$ noktasının bir $V(x_0)$ komşuluğu var öyle ki Ω bölgesinde $P(x, D)u = 0$ ve S nin pozitif tarafında $u \equiv 0$ olduğunda $V(x_0)$ komşuluğunun tamamında $u \equiv 0$ ise u genelleşmiş fonksiyonu için S boyunca P operatörüne göre tek devam özelliği sağlanır denir, (Gilbert vd. 2000).

Yukarıdaki tanımdan da görülebileceği gibi tek devam özelliği yerel bir özelliktir. Ancak kompaktlık kriterinin sağlanması durumunda genel sonuçlar elde edilebilir. 1990'ların başlarında bu alanda iki klasik sonuç bilinmekteydi. Bunlardan birincisi hiperyüzeyin geometrisi açısından daha optimal görülebilecek ancak analitik katsayılara ihtiyaç duyan Holmgren Teoremi, ikincisi ise sadece sürekli diferensiyellenebilir katsayılı diferensiyel operatörleri ele alan ancak hiperyüzeyin kuvvetli pseudo-konveks olmasını gerektiren Hörmander Teoremi'dir.

Teorem 2. (Holmgren Teoremi)

$P(x, D)$ operatörü, katsayıları analitik olan bir diferensiyel operatör olsun. Ayrıca S yönlendirilebilir C^1 hiperyüzeyi x_0 noktasında karakteristik olmasın. Bu durumda her $u \in D'(\Omega)$ için S boyunca x_0 noktasında P operatörüne göre tek devam özelliği sağlanır. Burada $D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonlar uzayıdır, (Gilbert vd. 2000).

Yukarıdaki teoremde analitik olması gerekmeyen keyfi Cauchy verileri için çözümün tekliği genelleşmiş fonksiyon uzaylarında ispatlanmış, diğer taraftan u çözümünün varlığı kabul edilmiştir. Analitik olmayan diferensiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümünün tekliği hala araştırılması gereken bir konudur, (Courant ve Hilbert 1961). 2-boyutlu eliptik denklemler için teklik teoremi, katsayıların analitik olmaması durumunda 1939 yılında Torsten Carleman tarafından ispatlanmıştır. Bu çalışmada, daha sonra Carleman değerlendirmeleri olarak adlandırılan, bir ağırlık fonksiyonu (φ) ve büyük parametre (s) içeren ve her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için sağlanan

$$s\| e^{s\varphi} u \|_{L_2(\Omega)} \leq C\| e^{S\varphi} Pu \|_{L_2(\Omega)}$$

formundaki öndeğerlendirmeler kullanılmıştır. Burada C sabiti s den bağımsız olup $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ açık bir kümedir, (Kenig 1986).

Carleman'ın elde ettiği sonuçlar C. Müller (1954) tarafından $\mathbb{R}^n$'e genelleştirilmiştir. Daha sonra A. P. Calderon (1958) ve L. Hörmander (1963) bu alanda günümüzde birçok çalışmaya temel teşkil eden önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Teorem 3. (Hörmander Teoremi)

P operatörü, katsayıları reel ve temel sembolü C^1 uzayından olan bir diferensiyel operatör olsun. Ayrıca S yönlendirilebilir C^2 hiperyüzeyi x_0 noktasında P ye göre kuvvetli pseudo-konveks olsun. Bu durumda her $u \in H^{m-1}(\Omega)$ için S boyunca x_0 noktasında P ye göre tek devam özelliği sağlanır, (Gilbert vd. 2000).

Geleneksel olarak Carleman değerlendirmeleri kötü konulmuş problemlerin çözümlerinin tekliğinin ispatında kullanılmıştır. Bu problemlere örnek olarak;

i. Dirichlet ve Neumann sınır koşulları sadece sınırın bir parçasında verildiğinde eliptik denklemler için Cauchy problemi,

ii. Dirichlet ve Neumann sınır koşulları yan sınırın bir parçasında verilip başlangıç şartlarının $t = 0$ da bilinmediği durumda parabolik ve hiperbolik denklemler için standart olmayan Cauchy problemi verilebilir.

1973 yılına gelindiğinde S. P. Shishatskii, bu fikri Hadamard anlamında kötü konulmuş olan problemler için şartlı Hölder kararlılığının araştırılmasında kullanmıştır. 1981 yılında A. L. Bukhgeim ve M. V. Klibanov, Carleman değerlendirmelerini kullanarak bazı katsayı ters problemleri için genel teklik ve kararlılık teoremlerini ispatlamışlardır. Bu çalışmadan önce katsayı ters problemleri için sadece yerel teklik teoremleri bilinmekteydi. Daha sonra ise bu yöntem; Puel ve Yamamoto (1996), Isakov ve Yamamoto (2000), Imanuvilov ve Yamamoto (2001a, b), Bellassoued ve Yamamoto (2006b), Klibanov ve Yamamoto (2006) tarafından hiperbolik denklemler için çeşitli ters problemlerin çözümlerinin kararlılığının araştırılmasında kullanılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Khaĭdarov (1987), Isakov (2006), Baudouin vd. (2007), Yuan ve Yamamoto (2007), Liu ve Triggiani (2012) bu alanda yapılan diğer önemli çalışmalardır. Parabolik denklemler için katsayı ters problemleri ile ilgili olarak Imanuvilov ve Yamamoto (1998), Yamamoto (2009), Lü (2012), Egger vd. (2005), Bellassoued ve Yamamoto (2006a), Benabdallah vd. (2007), Isakov (2006) önemli sonuçlar elde etmişlerdir, (Klibanov 2013).

2. Ultrahiperbolik Denklemlere Fiziksel Bir Bakış

Bu çalışmada özellikle fiziksel anlamı (çok boyutlu zaman) nedeni ile günümüzde büyük ilgi gören ultrahiperbolik denklemler ele alınmıştır. Çok boyutlu zamanla ilgili fiziksel teoriler ve yorumlar birçok araştırmacı tarafından bu problemlerin kararsız olduğu gerekçesiyle görmezden gelinmiştir. Bu görüş daha sonra matematikçiler arasında da yaygınlaşmış ve bu tür problemler ile ilgili çok fazla çalışma yapılmamıştır. Zira, zaman boyutunun birden büyük olması başta "nedensellik" olmak üzere klasik fiziğin bazı temel ilkelerini ihlal etmektedir, (Craig ve Weinstein 2009). Daha açık olarak, çok zaman boyutlu uzay-zaman sisteminde kapalı zamansal eğrilerin varlığı her zaman mümkündür. Bu eğrilerin varlığı bir gözlemcinin geçmişe seyahat ederek yaşanmış gelecekle uyuşmayacak değişiklikler yapmasına imkan tanır, (Foster ve Müller 2010). Diğer yandan başta sicim teorisi olmak üzere modern teorik fizikte ortaya çıkan gelişmeler, ek boyutların gerekliliğini ortaya koymaktadır. Günümüzde Stephen Hawking, Edward Witten ve Juan Maldacena gibi birçok önemli teorik fizikçi doğanın matematiksel tasvirinin tam olarak yapılabilmesi için sicim teorisini ilk adım olarak görmektedir. Bunun nedeni, bu teorinin kuantum alan teorisi ile genel görelilik teorisinin tutarlı bir kombinasyonuna olanak sağlamasıdır.

Ultrahiperbolik denklemler için ters problemlerle ilgili sınırlı sayıda çalışma yapılmıştır. Bu alanda yapılan başlıca çalışmalardan olan Amirov (2001) ve Lavrentiev vd. (1986) tarafından tek devam problemi ele alınmış ve kararlılık ispatlanmıştır. Romanov (2006), Gölgeleyen ve Yamamoto (2014), ultrahiperbolik denklemler için bazı ters problemlerin çözümlerinin kararlılığını farklı Carleman değerlendirmeleri yardımıyla araştırmışlardır.

3. Değişken Katsayılı Ultrahiperbolik Denklemler için Carleman Değerlendirmeleri

Bu bölümde $\Omega = \{(x,y): x \in D \subset \mathbb{R}^n, y \in G \subset \mathbb{R}^m\}$ bölgesinde $f(x,y)g(x,y) > 0$ olmak üzere

$$Lu := f(x,y)\Delta_y u(x,y) - g(x,y)\Delta_x u(x,y) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y) u_{x_i}$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} b_j(x,y) u_{y_j} + a_0(x,y) u(x,y) = 0 \tag{8}$$

değişken katsayılı ultrahiperbolik denklemi için bir Carleman değerlendirmesi elde edilmiştir. Bu değerlendirme, ele alınan denklemler için ters problemlerin çözümlerinin tekliğinin ve kararlılığının araştırılmasında önemli bir araçtır.

Ω bölgesinin sınırını
$\partial\Omega = \Gamma_x \cup \Gamma_y,\ \Gamma_x = \partial D \times G,\ \Gamma_y = D \times \partial G$ şeklinde gösterelim. Ayrıca $x_0 \notin \overline{D}, y_0 \in \mathbb{R}^m, \beta \in (0,1)$ ve $\psi(x,y) = |x - x_0|^2 - \beta |y - y_0|^2$ olmak üzere $\varphi(x,y) = e^{\gamma\psi(x,y)}$ ağırlık fonksiyonunu tanımlayalım.

Teorem 4. Kabul edelim ki her $\xi \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} &\xi \cdot \nabla_y(f^2)\nabla_y\psi \cdot \xi - \xi \cdot \nabla_y(fg)\nabla_x\psi \cdot \xi \\ &\geq |\xi|^2(\nabla_y\psi \cdot \nabla_y(f^2) - \nabla_x\psi \cdot \nabla_x(fg)), \\ &\xi \cdot \nabla_x(g^2)\nabla_x\psi \cdot \xi - \xi \cdot \nabla_x(fg)\nabla_y\psi \cdot \xi \\ &\geq |\xi|^2(\nabla_x\psi \cdot \nabla_x(g^2) - \nabla_y\psi \cdot \nabla_y(fg)), \end{aligned} \tag{9}$$

ve bir $\delta_0 > 0$ için

$$|x - x_0|^2 - \beta^2 |y|^2 \geq \delta_0^2, (x,y) \in \Omega \tag{10}$$

şartları sağlansın. Bu durumda her $s > s_0$ ve $u \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega (s|\nabla_y u|^2 + s|\nabla_x u|^2 + s^3 u^2) e^{2s\varphi} dxdy \leq C \int_\Omega |Lu|^2 e^{2s\varphi} dxdy \tag{11}$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $s_0 > 0$ sabitleri vardır.

İspat: İlk olarak, ağırlıklı L_2 normlarını kullanabilmek için yeni bilinmeyen z fonksiyonunu ve P_s operatörünü

$$L_0 u := f(x,y)\Delta_y u(x,y) - g(x,y)\Delta_x u(x,y) \tag{12}$$

olmak üzere

$$z(x,y) = e^{s\varphi(x,y)}u(x,y), \tag{13}$$

$$P_s z(x,y) = e^{s\varphi} L_0 u \tag{14}$$

şeklinde tanımlayalım. (12)-(14) bağıntılarından

$$P_s^+ z = f\Delta_y z - g\Delta_x z + s^2(f|\nabla_y \varphi|^2 - g|\nabla_x \varphi|^2)z, \tag{15}$$

$$P_s^- z = -2s(f\nabla_y \varphi \cdot \nabla_y z - g\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x z) - s(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)z \tag{16}$$

olmak üzere

$$P_s z = P_s^+ z + P_s^- z \tag{17}$$

yazılabilir. (15) ve (16) eşitlikleri kullanılarak

$$I_1 = -4s\int_\Omega f\Delta_y z(f\nabla_y z \cdot \nabla_y \varphi - g\nabla_x z \cdot \nabla_x \varphi)dxdy,$$
$$I_2 = -2s\int_\Omega f\Delta_y z(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)zdxdy,$$
$$I_3 = 4s\int_\Omega g\Delta_x z(f\nabla_y \varphi \cdot \nabla_y z - g\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x z)dxdy,$$
$$I_4 = 2s\int_\Omega g\Delta_x z(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)zdxdy,$$
$$I_5 = -4s^3\int_\Omega (f|\nabla_y \varphi|^2 - g|\nabla_x \varphi|^2)z(f\nabla_y \varphi \cdot \nabla_y z - g\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x z)dxdy,$$
$$I_6 = -2s^3\int_\Omega (f|\nabla_y \varphi|^2 - g|\nabla_x \varphi|^2)(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)|z|^2 dxdy$$

olmak üzere

$$2(P_s^+ z, P_s^- z)_{L_2(\Omega)} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$$

elde edilir. Şimdi, Green formülü yardımıyla, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ olduğunu da göz önünde bulundurarak I_k, k = 1,...,6 terimlerini değerlendirelim:

$$\begin{aligned}
I_1 &= -4s\int_\Omega f\Delta_y z(f\nabla_y z \cdot \nabla_y \varphi - g\nabla_x z \cdot \nabla_x \varphi)dxdy \\
&= -4s\int_\Omega \Delta_y z\nabla_y z \cdot \nabla_y \varphi f^2 dxdy + 4s\int_\Omega \Delta_y zfg\nabla_x z \cdot \nabla_x \varphi dxdy \\
&= 4s\int_\Omega \nabla_y z \cdot \nabla_y(\nabla_y z \cdot \nabla_y \varphi f^2)dxdy \\
&\quad -4s\int_\Omega \nabla_y z \cdot \nabla_y(fg\nabla_x z \cdot \nabla_x \varphi)dxdy \\
&= -2s\int_\Omega |\nabla_y z|^2 \Delta_y \varphi f^2 dxdy - 2s\int_\Omega |\nabla_y z|^2 \nabla_y \varphi \cdot \nabla_y(f^2)dxdy \\
&\quad +4s\sum_{k,j=1}^m \int_\Omega z_{y_k} z_{y_j} \varphi_{y_j y_k} f^2 dxdy - 4s\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \int_\Omega z_{y_k} g_{y_k} f z_{x_j} \varphi_{x_j} dxdy \\
&\quad +2s\int_\Omega |\nabla_y z|^2 \Delta_x \varphi fg dxdy + 2s\int_\Omega |\nabla_y z|^2 \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x(fg)dxdy \\
&\quad -4s\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \int_\Omega gf z_{y_k} z_{x_j} \varphi_{x_j y_k} dxdy + 4s\sum_{k,j=1}^m \int_\Omega z_{yk}(f^2)_{yk} z_{y_j} \varphi_{y_j} dxdy \\
&\quad -4s\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \int_\Omega z_{y_k} f_{y_k} g z_{x_j} \varphi_{x_j} dxdy,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= -2s\int_\Omega f\Delta_y z(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)zdxdy \\
&= 2s\int_\Omega \nabla_y z \cdot \nabla_y(f(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)z)dxdy \\
&= 2s\int_\Omega \nabla_y z \cdot \nabla_y(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)fzdxdy \\
&\quad +2s\int_\Omega \nabla_y z \cdot \nabla_y z(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)fdxdy \\
&\quad +2s\int_\Omega \nabla_y z \cdot \nabla_y f(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)zdxdy \\
&= -s\int_\Omega |z|^2 \Delta_y(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)fdxdy \\
&\quad +2s\int_\Omega |\nabla_y z|^2(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)fdxdy \\
&\quad -2s\int_\Omega |z|^2 \nabla_y f \cdot \nabla_y(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)dxdy \\
&\quad -s\int_\Omega |z|^2 \Delta_y f(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)dxdy,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= 4s\int_\Omega g\Delta_x z(f\nabla_y \varphi \cdot \nabla_y z - g\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x z)dxdy \\
&= 4s\int_\Omega \Delta_x zgf\nabla_y z \cdot \nabla_y \varphi dxdy - 4s\int_\Omega \Delta_x zg^2 \nabla_x z \cdot \nabla_x \varphi dxdy \\
&= -4s\int_\Omega \nabla_x z \cdot \nabla_x(gf\nabla_y z \cdot \nabla_y \varphi)dxdy \\
&\quad -4s\int_\Omega \nabla_x z \cdot \nabla_x(g^2 \nabla_x z \cdot \nabla_x \varphi)dxdy \\
&= -4s\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \int_\Omega z_{x_k} g_{x_k} f z_{y_j} \varphi_{y_j} dxdy + 2s\int_\Omega |\nabla_x z|^2 \Delta_y \varphi gf dxdy \\
&\quad +2s\int_\Omega |\nabla_x z|^2 \nabla_y \varphi \cdot \nabla_y(gf)dxdy + 4s\sum_{k,j=1}^n \int_\Omega z_{x_k} z_{x_j} \varphi_{x_j x_k} g^2 dxdy \\
&\quad -4s\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \int_\Omega z_{x_k} g f_{x_k} z_{y_j} \varphi_{x_j} dxdy + 4s\sum_{k,j=1}^n \int_\Omega z_{x_k}(g^2)_{x_k} z_{x_j} \varphi_{x_j} dxdy \\
&\quad -4s\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \int_\Omega z_{x_k} z_{y_j} \varphi_{y_j x_k} gf dxdy - 2s\int_\Omega |\nabla_x z|^2 \Delta_x \varphi g^2 dxdy \\
&\quad -2s\int_\Omega |\nabla_x z|^2 \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x(g^2)dxdy,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= 2s\int_\Omega g\Delta_x z(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)zdxdy \\
&= -2s\int_\Omega \nabla_x z \cdot \nabla_x(gz(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi))dxdy \\
&= -2s\int_\Omega \nabla_x z \cdot \nabla_x gz(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)dxdy \\
&\quad -2s\int_\Omega \nabla_x z \cdot \nabla_x z(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)gdxdy \\
&\quad -2s\int_\Omega \nabla_x z \cdot \nabla_x(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)zgdxdy \\
&= s\int_\Omega |z|^2 \Delta_x g(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)dxdy \\
&\quad +2s\int_\Omega |z|^2 \nabla_x g \cdot \nabla_x(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)dxdy \\
&\quad +s\int_\Omega |z|^2 \Delta_x(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)gdxdy \\
&\quad -2s\int_\Omega |\nabla_x z|^2 g(f\Delta_y \varphi - g\Delta_x \varphi)dxdy,
\end{aligned} \tag{21}$$

$$
\begin{aligned}
I_5 &= -4s^3 \int_\Omega (f|\nabla_y\varphi|^2 - g|\nabla_x\varphi|^2) z \\
&\times (f\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y z - g\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x z)\,dxdy \\
&= -2s^3 \int_\Omega (f\nabla_y(|z|^2)\cdot\nabla_y\varphi - g\nabla_x(|z|^2)\cdot\nabla_x\varphi) \\
&\times (f|\nabla_y\varphi|^2 - g|\nabla_x\varphi|^2)\,dxdy \\
&= -2s^3 \int_\Omega |z|^2 (f|\nabla_y\varphi|^2 - g|\nabla_x\varphi|^2) f (f\Delta_y\varphi - g\Delta_x\varphi)\,dxdy \\
&+ 2s^3 \int_\Omega |z|^2 f\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y (f|\nabla_y\varphi|^2 - g|\nabla_x\varphi|^2)\,dxdy \\
&- 2s^3 \int_\Omega |z|^2 \nabla_x\varphi\cdot\nabla_x (f|\nabla_y\varphi|^2 - g|\nabla_x\varphi|^2) g\,dxdy \\
&- 2s^3 \int_\Omega |z|^2 \nabla_x\varphi\cdot\nabla_x g (f|\nabla_y\varphi|^2 - g|\nabla_x\varphi|^2)\,dxdy \\
&+ 2s^3 \int_\Omega |z|^2 \nabla_y\varphi\cdot\nabla_y f (f|\nabla_y\varphi|^2 - g|\nabla_x\varphi|^2)\,dxdy
\end{aligned} \qquad (22)
$$

bulunur. Son olarak

$$
I_6 = -2s^3 \int_\Omega (f|\nabla_y\varphi|^2 - g|\nabla_x\varphi|^2)(f\Delta_y\varphi - g\Delta_y\varphi)|z|^2\,dxdy \qquad (23)
$$

olur. Yukarıda elde edilen (18)-(23) eşitlikleri birleştirilerek

$$
2(P_s^+ z, P_s^- z)_{L_2(\Omega)} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6
$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$
\begin{aligned}
J_1 &= 4s \sum_{k,j=1}^{m} \int_\Omega z_{y_k} z_{y_j} \varphi_{y_j y_k} f^2\,dxdy - 8s \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega z_{y_k} z_{x_j} \varphi_{x_j y_k} fg\,dxdy \\
&- 4s \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega (g_{y_k} f + f_{y_k} g) z_{y_k} z_{x_j} \varphi_{x_j}\,dxdy \\
&+ 4s \sum_{k,j=1}^{m} \int_\Omega z_{y_k} (f^2)_{y_k} z_{y_j} \varphi_{y_j}\,dxdy, \\
J_2 &= 4s \sum_{k,j=1}^{m} \int_\Omega z_{x_k} z_{y_j} \varphi_{x_j x_k} g^2\,dxdy \\
&- 4s \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega (g_{x_k} f + g f_{x_k}) z_{x_k} z_{y_j} \varphi_{x_j}\,dxdy \\
&+ 4s \sum_{k,j=1}^{n} \int_\Omega z_{x_k} (g^2)_{x_k} z_{x_j} \varphi_{x_j}\,dxdy, \\
J_3 &= -s \int_\Omega |z|^2 f\Delta_y (f\Delta_y\varphi - g\Delta_x\varphi)\,dxdy \\
&- s \int_\Omega |z|^2 \Delta_y f (f\Delta_y\varphi - g\Delta_x\varphi)\,dxdy, \\
J_4 &= s \int_\Omega |z|^2 g\Delta_x (f\Delta_y\varphi - g\Delta_x\varphi)\,dxdy \\
&+ s \int_\Omega |z|^2 \Delta_x g (f\Delta_y\varphi - g\Delta_x\varphi)\,dxdy, \\
&= -2s \int_\Omega |\nabla_y z|^2 (\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(f^2) - \nabla_x\varphi\cdot\nabla_x(fg))\,dxdy \\
&+ 2s \int_\Omega |\nabla_x z|^2 (\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(fg) - \nabla_x\varphi\cdot\nabla_x(g^2))\,dxdy, \\
J_5 &= -2s \int_\Omega |\nabla_y z|^2 (\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(f^2) - \nabla_x\varphi\cdot\nabla_x(fg))\,dxdy \\
&+ 2s \int_\Omega |\nabla_x z|^2 (\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(fg) - \nabla_x\varphi\cdot\nabla_x(g^2))\,dxdy,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_6 &= 2s \int_\Omega |z|^2 (\nabla_y f\cdot\nabla_y (f\Delta_y\varphi - g\Delta_x\varphi) \\
&- \nabla_x g\cdot\nabla_x (f\Delta_y\varphi - g\Delta_x\varphi))\,dxdy \\
&+ 2s^3 \int_\Omega |z|^2 (f\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y (f|\nabla_y\varphi|^2 - g|\nabla_x\varphi|^2) \\
&- g\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x (f|\nabla_y\varphi|^2 - g|\nabla_x\varphi|^2))\,dxdy \\
&+ 2s^3 \int_\Omega |z|^2 (\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y f - \nabla_x\varphi\cdot\nabla_x g)(f|\nabla_y\varphi|^2 - g|\nabla_x\varphi|^2)\,dxdy
\end{aligned}
$$

şeklindedir. İkinci olarak, φ ağırlık fonksiyonunun aşağıda verilen özelliklerini kullanarak $J_1,\ldots,J_6$ ifadelerini değerlendirelim:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{x_i x_i} = \gamma\varphi(2 + \gamma\psi_{x_i}^2), && \varphi_{x_i y_j} = \gamma^2\varphi\psi_{x_i}\psi_{y_j}, \\
&\varphi_{x_i x_j} = \gamma\varphi(\psi_{x_i x_j} + \gamma\psi_{x_i}\psi_{x_j}), && \varphi_{y_i y_j} = \gamma\varphi(\psi_{y_i y_j} + \gamma\psi_{y_i}\psi_{y_j}), \\
&\nabla_x\varphi = \gamma\varphi\nabla_x\psi, && \nabla_y\varphi = \gamma\varphi\nabla_y\psi, \\
&\Delta_x\varphi = \gamma\varphi(\Delta_x\psi + \gamma|\nabla_x\psi|^2), && \Delta_y\varphi = \gamma\varphi(\Delta_y\psi + \gamma|\nabla_y\psi|^2), \\
&\Delta_y\varphi - \Delta_x\varphi = \gamma\varphi d_1(\psi) + \gamma^2\varphi d_2(\psi).
\end{aligned}
$$

Burada

$$
d_1(\psi) = f\Delta_y\psi - g\Delta_x\psi,\ d_2(\psi) = f|\nabla_y\psi|^2 - g|\nabla_x\psi|^2
$$

olarak tanımlanmıştır. O halde

$$
\begin{aligned}
J_1 &= 4s \sum_{k,j=1}^{m} \int_\Omega z_{y_k} z_{y_j} \varphi_{y_j y_k} f^2\,dxdy - 8s \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega z_{y_k} z_{x_j} \varphi_{x_j y_k} fg\,dxdy \\
&- 4s \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega z_{y_k} (g_{y_k} f + f_{y_k} g) z_{x_j} \varphi_{x_j}\,dxdy \\
&+ 4s \sum_{k,j=1}^{m} \int_\Omega z_{y_k} (f^2)_{y_k} z_{y_j} \varphi_{y_j}\,dxdy \\
&= 4s \sum_{k,j=1}^{m} \int_\Omega \gamma\varphi\psi_{y_i y_k} f^2 z_{y_k} z_{y_j}\,dxdy \\
&+ 4s \sum_{k,j=1}^{m} \int_\Omega \gamma^2\varphi\psi_{y_j}\psi_{y_k} z_{y_k} z_{y_j} f^2\,dxdy \\
&- 8s \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \gamma^2\varphi g f \psi_{y_k}\psi_{x_j} z_{y_k} z_{x_j}\,dxdy \\
&- 4s \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \gamma\varphi\psi_{x_j} (gf)_{y_k} z_{y_k} z_{x_j}\,dxdy \\
&+ 4s \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \gamma\varphi z_{y_k} (f^2)_{y_k} z_{y_j} \psi_{y_j}\,dxdy
\end{aligned} \qquad (24)
$$

ve

$$\begin{aligned}
J_2 &= 4s\sum_{k,j=1}^{n}\int_\Omega z_{x_k}z_{x_j}\varphi_{x_jx_k}g^2\,dxdy \\
&+4s\sum_{k,j=1}^{n}\int_\Omega z_{x_k}(g^2)_{x_k}z_{x_j}\varphi_{x_j}\,dxdy \\
&-4s\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega (g_{x_k}f+gf_{x_k})z_{x_k}z_{y_j}\varphi_{y_j}\,dxdy \\
&= 4s\sum_{k,j=1}^{n}\int_\Omega \gamma\varphi z_{x_k}z_{x_j}\psi_{x_jx_k}g^2\,dxdy \\
&+4s\sum_{k,j=1}^{n}\int_\Omega \gamma^2\varphi z_{x_k}z_{x_j}\psi_{x_j}\psi_{x_k}g^2\,dxdy \\
&+4s\sum_{k,j=1}^{n}\int_\Omega \gamma\varphi\psi_{x_j}(g^2)_{x_k}z_{x_k}z_{x_j}\,dxdy \\
&-4s\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \gamma\varphi(gf)_{x_k}z_{x_k}z_{y_j}\psi_{y_j}\,dxdy \qquad (25)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\Delta_y(\varphi d_2(\psi)) &= \gamma\varphi\Delta_y\psi d_2(\psi)+\gamma^2\varphi|\nabla_y\psi|^2 d_2(\psi) \\
&+2\gamma\varphi\nabla_y\psi\cdot\nabla_y(d_2(\psi))+\varphi\Delta_y(d_2(\psi))
\end{aligned}$$

bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned}
J_3 &= -s\int_\Omega |z|^2 f\Delta_y(f\Delta_y\varphi-g\Delta_x\varphi)\,dxdy \\
&-s\int_\Omega |z|^2\Delta_y f(f\Delta_y\varphi-g\Delta_x\varphi)\,dxdy \\
&-s\int_\Omega |z|^2\Delta_y(\gamma\varphi(f\Delta_y\psi+f\gamma|\nabla_y\psi|^2 \\
&-g\Delta_x\psi-g\gamma|\nabla_y\psi|^2))\,dxdy \\
&-s\int_\Omega |z|^2\Delta_y f(\gamma\varphi(f\Delta_y\psi+f\gamma|\nabla_y\psi|^2 \\
&-g\Delta_x\psi-g\gamma|\nabla_y\psi|^2))\,dxdy \\
&= -s\int_\Omega |z|^2\gamma^2\varphi(d_1(\psi)\Delta_y\psi+\Delta_y(d_2(\psi)))\,dxdy \\
&-s\int_\Omega |z|^2\gamma^3\varphi(d_1(\psi)|\nabla_y\psi|^2+\Delta_y\psi d_2(\psi) \\
&+2\nabla_y\psi\cdot\nabla_y(d_2(\psi)))\,dxdy \\
&-s\int_\Omega |z|^2\gamma^4\varphi|\nabla_y\psi|^2 d_2(\psi)\,dxdy \\
&-s\int_\Omega |z|^2\Delta_y f(\gamma\varphi d_1(\psi)+\gamma^2\varphi d_2(\psi))\,dxdy \qquad (26)
\end{aligned}$$

elde edilir. J_4 terimi için

$$\begin{aligned}
\Delta_x(\varphi d_2(\psi)) &= \gamma\varphi\Delta_x\psi d_2(\psi)+\gamma^2\varphi|\nabla_x\psi|^2 d_2(\psi) \\
&+2\gamma\varphi\nabla_y\psi\cdot\nabla_x(d_2(\psi))+\varphi\Delta_x(d_2(\psi))
\end{aligned}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
J_4 &= s\int_\Omega |z|^2 g\Delta_x(f\Delta_y\varphi-g\Delta_x\varphi)\,dxdy \\
&+s\int_\Omega |z|^2\Delta_x g(f\Delta_y\varphi-g\Delta_x\varphi)\,dxdy \\
&= s\int_\Omega |z|^2 g\Delta_x(\gamma\varphi(f\Delta_y\psi+f\gamma|\nabla_x\psi|^2 \\
&-g\Delta_x\psi-g\gamma|\nabla_x\psi|^2))\,dxdy \\
&+s\int_\Omega |z|^2\Delta_x g(\gamma\varphi(f\Delta_y\psi+f\gamma|\nabla_x\psi|^2 \\
&-g\Delta_x\psi-g\gamma|\nabla_x\psi|^2))\,dxdy \\
&= s\int_\Omega |z|^2\gamma^2\varphi(d_1(\psi)\Delta_x\psi+\Delta_x(d_2(\psi)))\,dxdy \\
&+s\int_\Omega |z|^2\gamma^3\varphi(d_1(\psi)|\nabla_x\psi|^2+\Delta_x\psi d_2(\psi) \\
&+2\nabla_x\psi\cdot\nabla_x(d_2(\psi)))\,dxdy \\
&+s\int_\Omega |z|^2\gamma^4\varphi|\nabla_x\psi|^2 d_2(\psi)\,dxdy \\
&+s\int_\Omega |z|^2\Delta_x g(\gamma\varphi d_1(\psi)+\gamma^2\varphi d_2(\psi))\,dxdy \qquad (27)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
J_5 &= -2s\int_\Omega |\nabla_y z|^2(\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(f^2)-\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x(fg))\,dxdy \\
&+2s\int_\Omega |\nabla_x z|^2(\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(fg)-\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x(g^2))\,dxdy \\
&= -2s\int_\Omega \gamma\varphi|\nabla_y z|^2(\nabla_y\psi\cdot\nabla_y(f^2)-\nabla_x\psi\cdot\nabla_x(fg))\,dxdy \\
&+2s\int_\Omega \gamma\varphi|\nabla_x z|^2(\nabla_y\psi\cdot\nabla_y(fg)-\nabla_x\psi\cdot\nabla_x(g^2))\,dxdy \qquad (28)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Son olarak, J_6 terimi için

$$\begin{aligned}
&\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(f|\nabla_y\varphi|^2-g|\nabla_x\varphi|^2)=\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(\gamma^2\varphi^2 d_2(\psi)) \\
&= 2\gamma^4\varphi^3 d_2(\psi)\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\psi+\gamma^3\varphi^3\nabla_y\psi\cdot\nabla_y(d_2(\psi)), \\
&\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x(f|\nabla_y\varphi|^2-g|\nabla_x\varphi|^2)=2\gamma^4\varphi^3 d_2(\psi)\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\psi \\
&+\gamma^3\varphi^3\nabla_x\psi\cdot\nabla_x(d_2(\psi))
\end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
J_6 &= -2s\int_\Omega |z|^2(\nabla_y f\cdot\nabla_y(f\Delta_y\varphi-g\Delta_x\varphi) \\
&-\nabla_x g\cdot\nabla_x(f\Delta_y\varphi-g\Delta_x\varphi))\,dxdy \\
&+2s^3\int_\Omega |z|^2(f\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(f|\nabla_y\varphi|^2-g|\nabla_x\varphi|^2) \\
&-g\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x(f|\nabla_y\varphi|^2-g|\nabla_x\varphi|^2))\,dxdy \\
&+2s^3\int_\Omega |z|^2(\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y f-\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x g)(f|\nabla_y\varphi|^2-g|\nabla_x\varphi|^2)\,dxdy \\
&= -2s\int_\Omega |z|^2[\gamma(\nabla_y f\cdot\nabla_y\psi d_1(\psi))-\gamma^3\varphi(\nabla_y f\cdot\nabla_y\psi d_2(\psi)) \\
&-\gamma^2\varphi(\varphi\nabla_y f\cdot\nabla_y(d_2(\psi)))]\,dxdy \\
&+2s\int_\Omega |z|^2[\gamma(\nabla_x g\cdot\nabla_x\psi d_1(\psi))-\gamma^3\varphi(\nabla_x g\cdot\nabla_x\psi d_2(\psi)) \\
&-\gamma^2\varphi(\varphi\nabla_x g\cdot\nabla_x(d_2(\psi)))]\,dxdy \\
&+4s^3\int_\Omega |z|^2\gamma^4\varphi^3(d_2(\psi))^2\,dxdy \\
&+2s^3\int_\Omega |z|^2\gamma^3\varphi^3(\nabla_y\psi\cdot\nabla_y f-\nabla_x\psi\cdot\nabla_x g)d_2(\psi)\,dxdy \\
&+2s^3\int_\Omega |z|^2\gamma^2\varphi^2(f\nabla_y\psi\cdot\nabla_y(d_2(\psi))-g\nabla_x\psi\cdot\nabla_x(d_2(\psi)))\,dxdy \qquad (29)
\end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca (24)-(29) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
&2(P_s^+z,P_s^-z)_{L_2(\Omega)} = 4s\sum_{k,j=1}^{m}\int_\Omega \gamma\varphi\psi_{y_jy_k}f^2 z_{y_k}z_{y_j}dxdy\\
&+4s\int_\Omega \gamma^2\varphi\Big(\sum_{k,j=1}^{m}\psi_{y_j}z_{y_j}f\Big)^2 dxdy\\
&-8s\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \gamma^2\varphi gf\psi_{y_k}\psi_{x_j}z_{y_k}z_{x_j}dxdy\\
&-4s\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \gamma\varphi\psi_{x_j}(gf)_{y_k}z_{y_k}z_{x_j}dxdy\\
&+4s\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \gamma\varphi z_{y_k}(f^2)_{y_k}z_{y_j}\psi_{y_j}dxdy\\
&+4s\sum_{k,j=1}^{n}\int_\Omega \gamma\varphi z_{x_k}z_{x_j}\psi_{x_jx_k}g^2dxdy\\
&+4s\int_\Omega \gamma^2\varphi\Big(\sum_{k,j=1}^{n}\psi_{x_k}z_{x_k}g\Big)^2 dxdy+4s\sum_{k,j=1}^{n}\int_\Omega \gamma\varphi\psi_{x_j}(g^2)_{x_k}z_{x_k}z_{x_j}dxdy\\
&-4s\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \gamma\varphi(gf)_{x_k}z_{x_k}z_{y_j}\psi_{y_j}dxdy - s\int_\Omega |z|^2\gamma^2\varphi d_5(\psi)dxdy\\
&-2s\int_\Omega |z|^2\gamma^3\varphi d_7(\psi)dxdy - s\int_\Omega |z|^2\gamma^4\varphi(d_2(\psi))^2dxdy\\
&-s\int_\Omega |z|^2(\gamma\varphi(\Delta_yf-\Delta_xg)d_1(\psi)+\gamma^2\varphi(\Delta_yf-\Delta_xg)d_2(\psi))dxdy\\
&-2s\int_\Omega |\nabla_yz|^2\gamma\varphi(\nabla_y\psi\cdot\nabla_y(f^2)-\nabla_x\psi\cdot\nabla_x(fg))dxdy\\
&+2s\int_\Omega |\nabla_xz|^2\gamma\varphi(\nabla_y\psi\cdot\nabla_y(fg)-\nabla_x\psi\cdot\nabla_x(g^2))dxdy\\
&+4s^3\int_\Omega |z|^2\gamma^4\varphi^3(d_2(\psi))^2dxdy+2s^3\int_\Omega |z|^2\gamma^3\varphi^3d_2(\psi)d_3(\psi)dxdy\\
&+2s^3\int_\Omega |z|^2\gamma^2\varphi^2d_6(\psi)dxdy
\end{aligned}\tag{30}
$$

elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
&d_3 := d_3(\psi)=\nabla_y\psi\cdot\nabla_yf-\nabla_x\psi\cdot\nabla_xg,\\
&d_4 := d_4(\psi)=\nabla_yf\cdot\nabla_y(d_2(\psi))-\nabla_xg\cdot\nabla_x(d_2(\psi)),\\
&d_5 := d_5(\psi)=(d_1(\psi))^2+d_4(\psi)+\Delta_y(d_2(\psi))-\Delta_x(d_2(\psi)),\\
&d_6 := d_6(\psi)=f\nabla_y\psi\cdot\nabla_y(d_2(\psi))-g\nabla_x\psi\cdot\nabla_x(d_2(\psi)),\\
&d_7 := d_7(\psi)=d_1(\psi)d_2(\psi)+d_2(\psi)d_3(\psi)\\
&\qquad +\nabla_y\psi\cdot\nabla_y(d_2(\psi))-\nabla_x\psi\cdot\nabla_x(d_2(\psi))
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanmıştır. Buna ek olarak (30) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci, üçüncü ve yedinci terimler için

$$\int_\Omega 4s\gamma^2\varphi\Big(\sum_{j=1}^{m}\psi_{y_j}z_{y_j}f-\sum_{k=1}^{n}\psi_{x_k}z_{x_k}g\Big)^2 dxdy\geq 0$$

eşitsizliği ve (9) kabulü dikkate alındığında

$$
\begin{aligned}
&2(P_s^+z,P_s^-z)_{L_2(\Omega)} \geq -\int_\Omega 8\beta s\gamma\varphi|\nabla_yz|^2f^2dxdy\\
&+\int_\Omega 8s\gamma\varphi|\nabla_xz|^2g^2dxdy+\int_\Omega 4s^3\gamma^4\varphi^3d_2^2|z|^2dxdy\\
&+\int_\Omega o(s^3\gamma^4\varphi^3)|z|^2dxdy
\end{aligned}
$$

elde edilir. (10) kabulü dikkate alınarak

$$d_2^2=16(|x-x_0|^2-\beta^2|y-y_0|^2)^2\geq 16\delta_0^2$$

yazılabilir. O halde son eşitsizlikten

$$
\begin{aligned}
&2(P_s^+z,P_s^-z)_{L_2(\Omega)} \geq -\int_\Omega 8\beta s\gamma\varphi|\nabla_yz|^2f^2dxdy\\
&+\int_\Omega 8s\gamma\varphi|\nabla_xz|^2g^2dxdy\\
&+\int_\Omega 64s^3\gamma^4\varphi^3\delta_0^2|z|^2dxdy+\int_\Omega o(s^3\gamma^4\varphi^3)|z|^2dxdy
\end{aligned}\tag{31}
$$

bulunur. (31) eşitsizliğinin sağ tarafındaki birinci ve ikinci terimlerin işaretleri farklı olduğundan ikinci bir değerlendirmeye ihtiyaç duyulur:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega (P_sz)\varphi zdxdy=\int_\Omega f\Delta_yz\varphi zdxdy-\int_\Omega g\Delta_xz\varphi zdxdy\\
&+\int_\Omega s^2(f|\nabla_y\varphi|^2-g|\nabla_x\varphi|^2)\varphi|z|^2dxdy\\
&-\int_\Omega 2s(f\nabla_y\varphi\cdot\nabla_yz-g\nabla_x\varphi\cdot\nabla_xz)\varphi zdxdy\\
&-\int_\Omega s(f\Delta_y\varphi-g\Delta_x\varphi)\varphi|z|^2dxdy\\
&=K_1+K_2+K_3+K_4+K_5.
\end{aligned}
$$

Burada sırasıyla;

$$
\begin{aligned}
&K_1=\int_\Omega f\Delta_zz\varphi zdxdy=-\int_\Omega \nabla_yz\cdot\nabla_y(f\varphi z)dxdy\\
&=\frac{1}{2}\int_\Omega \gamma\varphi|z|^2\Delta_y\psi fdxdy+\frac{1}{2}\int_\Omega \gamma^2\varphi f|z|^2|\nabla_y\psi|^2dxdy\\
&-\int_\Omega \varphi f|\nabla_yz|^2dxdy+\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi|z|^2\Delta_yfdxdy\\
&+\int_\Omega \gamma\varphi|z|^2\nabla_y\psi\cdot\nabla_yfdxdy,\\
&K_2=-\int_\Omega g\Delta_xz\varphi zdxdy=\int_\Omega \nabla_xz\cdot\nabla_x(g\varphi z)dxdy\\
&=-\frac{1}{2}\int_\Omega \gamma\varphi|z|^2\Delta_x\psi gdxdy-\frac{1}{2}\int_\Omega \gamma^2\varphi g|z|^2|\nabla_x\psi|^2dxdy\\
&+\int_\Omega \varphi g|\nabla_xz|^2dxdy-\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi|z|^2\Delta_xgdxdy\\
&-\int_\Omega \gamma\varphi|z|^2\nabla_x\psi\cdot\nabla_xgdxdy,\\
&K_3=\int_\Omega s^2(f|\nabla_y\varphi|^2-g|\nabla_x\varphi|^2)\varphi|z|^2dxdy\\
&=\int_\Omega s^2\gamma^2\varphi^3(f|\nabla_y\psi|^2-g|\nabla_x\psi|^2)|z|^2dxdy\\
&=\int_\Omega s^2\gamma^2\varphi^3d_2(\psi)|z|^2dxdy,\\
&K_4=-\int_\Omega 2s(f\nabla_y\varphi\cdot\nabla_yz-g\nabla_x\varphi\cdot\nabla_xz)\varphi zdxdy\\
&=-\int_\Omega s\nabla_y(\varphi f|z|^2)\cdot\nabla_y\varphi dxdy-\int_\Omega s\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\varphi f|z|^2dxdy\\
&+\int_\Omega s\nabla_yf\cdot\nabla_y\varphi\varphi|z|^2dxdy+\int_\Omega s\nabla_x(\varphi g|z|^2)\cdot\nabla_x\varphi dxdy\\
&-\int_\Omega s\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\varphi g|z|^2dxdy-\int_\Omega s\nabla_xg\cdot\nabla_y\varphi\varphi|z|^2dxdy\\
&=\int_\Omega s\gamma\varphi^2d_1(\psi)|z|^2dxdy+\int_\Omega s\gamma^2\varphi^2d_2(\psi)|z|^2dxdy\\
&+\int_\Omega s\gamma\varphi^2(\nabla_yf\cdot\nabla_y\psi-\nabla_xg\cdot\nabla_x\psi)|z|^2dxdy,\\
&K_5=-\int_\Omega s(f\Delta_y\varphi-g\Delta_x\varphi)\varphi|z|^2dxdy\\
&=\int_\Omega s\gamma\varphi^2d_1(\psi)|z|^2dxdy-\int_\Omega s\gamma^2\varphi^2d_2(\psi)|z|^2dxdy
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. Bu durumda

$$\int_\Omega (P_s z)\varphi z dxdy = \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma\varphi |z|^2 \Delta_y \psi f dxdy$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \gamma^2\varphi f |z|^2 |\nabla_y \psi|^2 dxdy$$
$$-\int_\Omega \varphi f |\nabla_y z|^2 dxdy + \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi |z|^2 \Delta_y f dxdy$$
$$+\int_\Omega \gamma\varphi |z|^2 \nabla_y \psi \cdot \nabla_y f dxdy - \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma\varphi |z|^2 \Delta_x \psi g dxdy$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \gamma^2 \varphi g |z|^2 |\nabla_x \psi|^2 dxdy + \int_\Omega \varphi g |\nabla_x z|^2 dxdy$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi |z|^2 \Delta_x g dxdy - \int_\Omega \gamma\varphi |z|^2 \nabla_x \psi \cdot \nabla_x g dxdy$$
$$+\int_\Omega s^2\gamma^2\varphi^3 d_2(\psi)|z|^2 dxdy - \int_\Omega s\gamma\varphi^2 d_1(\psi)|z|^2 dxdy$$
$$+2\int_\Omega s\gamma^2\varphi^2 d_2(\psi)|z|^2 dxdy$$
$$+\int_\Omega s\gamma\varphi^2(\nabla_y f\cdot\nabla_y\psi - \nabla_x g\cdot\nabla_x\psi)|z|^2 dxdy \qquad (32)$$

olarak elde edilir. (32) denklemi $-s\gamma(8\beta+\mu)f$ ile çarpılırsa, $\mu > 0$ olmak üzere

$$-\int_\Omega (8\beta+\mu)s\gamma\varphi f(P_s z)z dxdy$$
$$=\int_\Omega (8\beta+\mu)s\gamma\varphi f^2 |\nabla_y z|^2 dxdy$$
$$-\int_\Omega (8\beta+\mu)s\gamma\varphi f g |\nabla_x z|^2 dxdy$$
$$+\int_\Omega o(s^3\gamma^4\varphi^3)|z|^2 dxdy \qquad (33)$$

bulunur. (31) ve (33) bağıntıları dikkate alınarak

$$2(P_s^+ z, P_s^- z)_{L_2(\Omega)} - \int_\Omega (8\beta+\mu)s\gamma\varphi f(P_s z)z dxdy$$
$$\geq \int_\Omega \mu s\gamma\varphi |\nabla_y z|^2 f^2 dxdy + \int_\Omega (8g^2 - 8\beta f - \mu g f)|\nabla_x z|^2 dxdy$$
$$+\int_\Omega 64 s^3\gamma^4\varphi^3\delta_0^2 |z|^2 dxdy + \int_\Omega o(s^3\gamma^4\varphi^3)|z|^2 dxdy$$

elde edilir. Son olarak $0 < \beta < 1$ ve yeterince küçük $\mu > 0$ için $8g^2 - 8\beta f - \mu g f > 0$ olur. Böylece Teorem 4'ün ispatı tamamlanır.

4. Kaynaklar

Amirov, AK. 2001. Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations, VSP, Utrecht The Netherlands, 201 pp.

Baudouin, L., Mercado, A., Osses, A. 2007. A global Carleman estimate in a transmission wave equation and application to a one-measurement inverse problem. *Inverse Probl.*, 23: 1-22.

Bellassoued, M., Yamamoto, M. 2006a. Inverse source problem for a transmission problem for a parabolic equation. *J. Inverse Ill-Pose. P.*, 14: 47-56.

Bellassoued, M., Yamamoto, M. 2006b. Logarithmic stability in determination of a coefficient in an acoustic equation by arbitrary boundary observation. *J. Math. Pures Appl.*, 85: 193-224.

Benabdallah, A., Dermenjian, Y., Le Rousseau, J. 2007. Carleman estimates for the one-dimensional heat equation with a discontinous coefficient and applications to controllability and an inverse problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 336: 865-887.

Bukhgeim, AL., Klibanov, MV. 1981. Global uniqueness of a class of inverse problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 260(2): 269-272.

Calderón, A. P. 1958. Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations. *Am. J. Math.*, 80(1): 16-36.

Carleman, T. 1939. Sur un probleme, d'unicité pour les systemes d'équations aux derivées partiellesa deux variables independentes. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 2: 1-9.

Cauchy, A. L. 1842. Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles. *C. R. Acad. Sci.*, XV: 44-58.

Courant, R., Hilbert, D. 1961. Methods of Mathematical Physics, Volume II Partial Differential Equations New York, 830 pp.

Craig, W., Weinstein, S. 2009. On determinism and well-posedness in multiple time dimensions. *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.*, 465: 3023-3046.

Egger, H., Engl, HW., Klibanov, MV. 2005. Global uniqueness and Hölder stability for recovering a nonlinear source term in a parabolic equation. *Inverse Probl.*, 21: 271-290.

Foster, J., Müller, B. 2010. Physics with two time dimensions. arXiv preprint arXiv:1001.2485.

Gilbert, RP., Kajiwara, J., Xu, YS. 2000. Direct and inverse problems of mathematical physics, Springer Science & Business Media, 451 pp.

Gölgeleyen, F., Yamamoto, M. 2014. Stability of inverse problems for ultrahyperbolic equations. *Chinese Ann. Math. B.*, 35(4): 527-556.

Gölgeleyen, I. 2010. On the Solution of an Inverse Problem for an Integro-differential Transport Equation. *CMES-Comp. Model. Eng. Sci.*, *64*(1): 71-89.

Holmgren, E. 1901. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen. Öfvers. *Kongl. Vetensk.-Akad. Förh.*, *58*: 91-105.

Hörmander, L. 1963. Linear partial differential operators, Springer Verlag, Berlin, 285 pp.

Imanuvilov, OY., Yamamoto, M. 1998. Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the Carleman estimate. *Inverse Probl.*, 14: 1229-1245.

Imanuvilov, OY., Yamamoto, M. 2001a. Global Lipschitz stability in an inverse hyperbolic problem by interior observations. *Inverse Probl.*, 17: 717-728.

Imanuvilov, OY., Yamamoto, M. 2001b. Global uniqueness and stability in determining coefficients of wave equations. *Commun. Part. Diff. Eq.*, 26: 1409-1425.

Isakov, V., Yamamoto, M. 2000. Carleman estimate with the Neumann boundary condition and its applications to the observability inequality and inverse hyperbolic problems. *Contemp. Math.*, 268: 191-225.

Isakov, V. 2006. Inverse problems for partial differential equations, Springer Science & Business Media, 344 pp.

Kenig, CE. 1986. Carleman estimates, uniform Sobolev inequalities for second-order differential operators, and unique continuation theorems. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, Calif., 1: 948-960.

Khaĭdarov, A. 1987. On stability estimates amd inverse problems for second order hyperbolic equations. *Math. USSR Sb.*, 58: 267-277.

Klibanov, MV., Yamamoto, M. 2006. Lipschitz stability for an inverse problem for an acoustic equation. *Appl. Anal.*, 85: 515-538.

Klibanov, MV. 2013. Carleman estimates for global uniqueness, stability and numerical methods for coefficient inverse problems. *J. Inverse Ill-Pose. P.*, *21*(4): 477-560.

Kowalevsky, S. 1875. "Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung". *J.* Reine *Angew. Math.*, 80: 1-32.

Lavrent'ev, MM., Romanov, VG., Shishatskii, SP. 1986. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. American Mathematical Society, Providence, RI, 290 pp.

Liu, S., Triggiani, R. 2012. Global uniqueness and stability in determining the damping coefficient of an inverse hyperbolic problem with non-homogeneous Dirichlet BC through an additional localized Neumann boundary condition. *Appl. Anal.*, 91: 1551-1581.

Lü, Q. 2012. Carleman estimate for stochastic parabolic equations and inverse stochastic parabolic problems. *Inverse Probl.*, 28(4): 045008.

Müller, C. 1954. On the behavior of the solutions of the differential equation ΔU= F (x, U) in the neighborhood of a point. *Commun. Pure Appl. Math.*, 7(3): 505-515.

Petrovskii, I. 1967. Partial Diffential Equations, Nauka, Moscow, 410 pp.

Puel, JP., Yamamoto, M. 1996. On a global estimate in a linear inverse hyperbolic problem. *Inverse Probl.*, 12: 995-1002.

Romanov, VG., 2006. Estimate for the solution to the Cauchy problem for an ultrahyperbolic inequality, *Dokl. Math.*, 74: 751–754.

Yamamoto, M. 2009. Carleman estimates for parabolic equations and applications. *Inverse Probl.*, 25: 123013.

Yildiz, M., Heydarov, B., Gölgeleyen, I. 2010. Approximate Solution of an Inverse Problem for a Non-Stationary General Kinetic Equation. *CMES-Comp. Model. Eng. Sci.*, *62*(3): 255-264.

Yuan, G., Yamamoto, M. 2007. Lipshitz stability in inverse problems for a Kirchhoff plate equation. *Asymptotic Anal.*, 53: 29-60.