www.istatistikciler.org
İstatistikçiler Dergisi 2 (2009) 70-81

İstatistikçiler Dergisi

Yatırım getirileri bir gecikmeli hareketli ortalama modeline uyduğunda performans kriterine dayalı optimal amortisman süresinin belirlenmesi

Yasemin Gençtürk

Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800-Beytepe, Ankara, Türkiye
yasemins@hacettepe.edu.tr

Tekin Sözer

Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800-Beytepe, Ankara, Türkiye
sozer@hacettepe.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, faydası belirli emeklilik planlarında yatırım getirileri bir gecikmeli hareketli ortalama modeline uyduğunda katkı oranı riski ile yükümlülüklerin yerine getirilememe riskinin ağırlıklı ortalamasından oluşan performans kriterini minimum yapan optimal amortisman süresi belirlenmiş ve bu sürenin model parametresi ile beklenen getiri oranınındaki değişikliklerden nasıl etkilendiği incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: *Faydası belirli emeklilik planları; Katkı oranı riski; Yükümlülüklerin yerine getirilememe riski; Bir gecikmeli hareketli ortalama modeli (MA(1)), Optimal amortisman süresi.*

Abstract

Determination of the optimal amortization period using performance criteria when real rates of return follow first order moving average model

In this study, optimal amortization period is determined by minimizing the performance criteria which is a weighted average of contribution rate risk and solvency risk when the rates of return are assumed to be represented by first order moving average model and it is investigated how this period is affected by the changes in model parameter and expected rate of return.

Keywords: *Defined benefit pension plans; Contribution rate risk; Solvency risk; First order moving average model (MA(1); Optimal amortization period.*

1. Giriş

Üyelere emekli olduklarında ne kadar aylık bağlanacağı emeklilik tarihinden önce kesin olarak bilinmemekle birlikte, plan sözleşmesinde bağlanacak aylığın neye bağlı olacağının belirtildiği emeklilik planları faydası belirli emeklilik planları olarak adlandırılır. Bu planlarda, katkısı belirli planların aksine yatırım riski işveren tarafından üstlenilir ve emeklilik fonuna işverenin yapacağı katkı fonun getiri oranına bağlıdır. Faydası belirli emeklilik planlarında, her yıl her üye adına fona ne kadar katkıda bulunulması gerektiği, yani yükümlülüğün ne kadarının ne zaman fonlanacağına karar verilmesi düzenli aralıklarla yapılan aktüeryal hesaplamalarla belirlenir. Hesaplamalar, yatırım getirisi, maaş artışı, enflasyon, masraflar, ölümlülük, maluliyet, işten ayrılmalar, işe yeni girişler gibi kriterlere ilişkin varsayımlara bağlı olarak yapılır.

İşverenin yükümlülüklerini yerine getirecek yeterli fon miktarına ulaşabilmek için her yıl fona ne kadar katkıda bulunulması gerektiğini belirlemek amacıyla kullanılan yöntemler aktüeryal fonlama yöntemleri olarak adlandırılır ve bireysel ve bütünsel fonlama yöntemleri olmak üzere iki grupta toplanır [1]. Bireysel fonlama yöntemlerinde herbir üye için aktüeryal yükümlülük ve standart katkı hesaplandıktan sonra toplam yükümlülük ve toplam katkı belirlenirken, bütünsel fonlama yöntemlerinde aktif (halen çalışan) ve pasif (emekli olmuş) tüm üyeler dikkate alınarak toplam standart katkı hesaplanır.

Aktüeryal değerlendirme varsayımlarının aynen gözlenmesi mümkün olmadığından, yani varsayım bozulumu söz konusu olduğundan herhangi bir anda fon fazlası ya da açığı ortaya çıkar. Bu nedenle, fona yapılacak katkı belirlenirken standart katkıda ayarlama yapılır. Herhangi bir anda ortaya çıkan fon fazlası ya da açığının amortismanında kullanılan farklı yöntemler vardır. Bu yöntemlerden en sık kullanılanlar, fonlanmamış yükümlülüğün belirli bir döneme yayılması yöntemi ve kayıpların amortismanı yöntemi olarak verilebilir. Fonlanmamış yükümlülüğün hangi sürede amortize edilmesi gerektiğini belirlemek faydası belirli emeklilik planlarının stokastik kontrolünde önemli olduğundan, bu sürenin dikkatli bir şekilde seçilmesi gerekir [5]. Sermaye piyasasında yatırım araçlarının getirileri belirsiz olduğu için faydası belirli emeklilik fonlarının stokastik kontrolü, fona yapılacak katkılar ile fonun yatırım araçlarına tahsisinin kontrolünü içerir [3].

Faydası belirli emeklilik planlarında, işveren ve üyelerin karşı karşıya olduğu iki temel riskten söz edilebilir: katkı oranı riski ve yükümlülüklerin yerine getirilememe riski. İşveren yatırım performansının emeklilik fonuna yapılacak katkılarda beklenmedik önemli değişikliklere neden olmamasını ister. İşveren katkı oranı riski minimum olacak şekilde fona katkıda bulunurken, aynı zamanda yükümlülüklerini karşılayabilecek fon büyüklüğüne de ulaşmak isteyeceğinden, yükümlülüklerin yerine getirilememe riski minimum olacak şekilde emeklilik fonuna katkıda bulunur ve fonu yatırım araçlarına yönlendirir. Katkı oranı riski, fona yapılacak katkının ideal katkıdan (standart ya da hedef katkı) sapma miktarı ile ölçülür ve planın ne kadar dengede olduğunun bir göstergesidir [4, 6, 8]. Genel olarak üyeler emeklilik fonuna maaşlarının plan sözleşmesinde belirtilen oranında katkıda bulunduklarından katkı oranı riski ile ilgilenmezler. Plan üyeleri kendilerine tahahhüt edilen yükümlülüklerin yerine getirilmesini yani ödenecek emekli aylıklarının güvencede olmasını, bir başka deyişle yükümlülüklerin yerine getirilememe riskinin minimum olmasını isterler [6]. Yükümlülüklerin yerine getirilememe riski, mevcut emeklilik fonunun ideal fondan (aktüeryal yükümlülük ya da hedef fon büyüklüğü) sapma miktarı ile ölçülür ve planın üyeler için ne kadar güvenli olduğunun bir başka deyişle yükümlülüklerin ne kadar güvencede olduğunun bir göstergesidir [4]

Herhangi bir anda ortaya çıkan fon fazlası ya da açığının en önemli nedeni yatırım getirisidir. Haberman, Butt ve Megaloudi, yatırım getirilerinin aynı dağılımlı bağımsız raslantı değişkenleri olması durumunda katkı oranı riski ile yükümlülüklerin yerine getirilememe riskinin ağırlıklı ortalamasından oluşan performans kriterini minimize eden optimal amortisman süresini belirlemişlerdir [4].

Yatırım getirilerinin aynı dağılımlı bağımsız rastlantı değişkenleri olduğunu varsaymak oldukça kısıtlayıcı bir yaklaşımdır. Genellikle herhangi bir anda yatırımın getirisi daha önce gözlenen yatırım getirisi/getirilerine bağlıdır ve yatırım getirileri ya da getirilerin bir önceki yıla göre değişimi durağandır. Bu nedenle, bu çalışmada yatırım getirilerinin durağan bir model olan bir gecikmeli hareketli ortalama (MA(1)) modeline uyduğu varsayılarak Haberman, Butt ve Megaloudi' nin tanımladığı performans kriterini minimum yapan amortisman süresi belirlenmiş; optimal amortisman süresinin model parametresi ile beklenen getiri oranındaki değişikliklerden nasıl etkilendiği araştırılmıştır.

2. Performans kriteri

Haberman, Butt ve Megaloudi' nin tanımladığı katkı oranı riski ile yükümlülüklerin yerine getirilememe riskinin ağırlıklı ortalamasından oluşan performans kriteri:

$$ {}_sJ_T = E\left\{\sum_{t=s}^{T-1} w^t \left[\lambda(C(t)-NC(t))^2 + (1-\lambda)(F(t)-AL(t))^2\right]\right\} \tag{1}$$

biçimindedir.

Eş.(1)' de $C(t)$ (t, t+1) yılında fona yapılacak katkı, $F(t)$ t anında fon büyüklüğü; $NC(t)$ (t, t+1) yılında hedef katkı, $AL(t)$ (t, t+1) yılında hedef fon büyüklüğü, $w = (1+j)^{-1}$, $j > 0$ belirli bir periyotta fona yapılacak katkıları ağırlıklandırmak amacıyla kullanılan iskonto faktörü ve λ yükümlülüklerin yerine getirilememe riskinin katkı oranı riskine göre göreli önemini gösteren ağırlık faktörünü göstermektedir.

C(t)' nin NC(t)' den farkı katkı oranı riskini, F(t)' nin AL(t)' den farkı ise yükümlülüklerin yerine getirilememe riskinin bir ölçüsüdür. Hedef değerler olan NC(t) ve AL(t) genellikle aktüeryal fonlama yöntemleri kullanılarak hesaplanmaktadır.

Eş.(1)' de NC(t) ve AL(t) sırasıyla C(t) ve F(t)' nin beklenen değerine eşit olarak alınırsa performans kriteri,

$$ {}_sJ_T = \sum_{t=s}^{T-1} w^t \left[\lambda \, \mathrm{Var}C(t) + (1-\lambda)\mathrm{Var}F(t)\right] \tag{2}$$

biçimine dönüşür.

Eş.(2)' de $T = \infty$ ve $s = 0$ olarak alınırsa performans kriteri:

$$ J_\infty = \sum_{t=0}^{\infty} w^t \left[\lambda \, \mathrm{Var}C(t) + (1-\lambda)\mathrm{Var}F(t)\right] \tag{3}$$

olarak elde edilir [4].

3. Model

Aktüeryal değerlendirme finansal ve demografik değişkenlere ilişkin belirli varsayımlar altında yapılmaktadır. Bu çalışmada amaç; yatırım getirileri MA(1) modeline uyduğu varsayımı altında optimal amortisman süresini belirlemek olduğu için bir emeklilik planında;

1) Zamanla sadece yatırım getirisinin değişkenlik gösterdiği,
2) Üye portföyünün yıldan yıla değişmediği, yani her yaş grubunda aynı sayıda üye olacak şekilde yeni üye girişlerinin olduğu,
3) Maaş artışının sabit olduğu, yani maaşların reel olarak artmadığı,
4) Aktüeryal faiz oranı i_v ' nin sabit olduğu,
5) $(t, t+1)$ yılında fonun reel getiri oranının $i(t+1)$ ve anlık reel getiri oranının $\delta(t+1) = \ln\left[1 + i(t+1)\right]$ olduğu,
6) Aktüeryal faiz oranının fonun uzun dönemde beklenen getiri oranına eşit, yani $E\left[1+i(t)\right] = E\left[e^{\delta(t)}\right] = (1+i),\ i = i_v$ olduğu,

7) Fona yapılan katkılar ile fondan yapılan ödemelerin yılın başında yapıldığı,

8) Değerlendirme tarihi $t = 0$ ’ da fonun değerinin(F_0) bilindiği yani $P\left[F(0) = F_0\right] = 1$ olduğu ve

9) Aktüeryal değerlendirmenin her yıl yapıldığı

varsayılacaktır.

Yukarıda verilen varsayımlarına dayalı olarak toplam standart katkı NC, toplam aktüeryal yükümlülük AL ve ödenecek emekli aylığı B’ nin sabit olduğu yani zamana bağlı olarak değişmediği söylenebilir.

m amortisman süresini ve $k = 1/\ddot{a}_{\overline{m|}}$ göstermek üzere

$$AL = (1+i)(AL + NC - B) \tag{4}$$

$$C(t) = NC + k(AL - F(t)) \tag{5}$$

olarak elde edilir.

Bu durumda fon düzeyi,

$$F(t+1) = \left[1 + i(t)\right]\left[F(t) + C(t) - B\right] = \left[1 + i(t)\right]\left[QF(t) + R\right] \tag{6}$$

olarak elde edilir.

Eş.(6)’ da $Q = 1 - k$ ve $R = NC - B + kAL = AL(k - d)$,$d = \dfrac{i}{1+i}$ biçimindedir.

F(t)’ nin varyansı hesaplandıktan sonra Eş.(5)’ den C(t)’ nin varyansı bulunur:

$$\mathrm{Var}\,C(t) = k^2\,\mathrm{Var}\,F(t) \tag{7}$$

Eş.(7), Eş.(3)’ de yerine konulursa performans kriteri:

$$J_\infty = (\lambda k^2 + 1 - \lambda)\sum_{t=0}^{\infty} w^t \mathrm{Var}\,F(t) \tag{8}$$

biçiminde elde edilir.

Performans ölçütünde $\lambda = 0$ olarak alındığında amaç sadece yükümlülüklerin yerine getirilememe riskini minimum yapan amortisman süresini belirlemektir. Bu durumda bağlanacak emekli aylıklarının ne kadar güvencede olduğu fonlanmamış yükümlülüklerin, standart katkıya yapılan ek katkılarla fonlanma hızına bağlıdır. Fonlanmamış yükümlülükler ne kadar kısa sürede amortize edilirse, emekli aylıklarının o kadar güvencede olduğu söylenebilir.

Performans ölçütünde $\lambda = 1$ olarak alındığında amaç sadece katkı oranı riskini minimum yapan optimal amortisman süresinin belirlenmesidir. Fonlanmamış yükümlülükler ne kadar uzun dönemde amortize edilirse fona yapılacak katkılar da o kadar durağan olmaktadır. Durağan katkılar işverenin nakit akışını daha etkin bir biçimde planlamasına olanak verdiğinden, fonlanmamış yükümlülükler uzun bir döneme yayılarak amortize edilmelidir.

Performans ölçütünde $0<\lambda<1$ olarak alındığında amaç, katkı oranı riski ile yükümlülüklerin yerine getirilememe riskini minimum yapan optimal amortisman süresinin belirlenmesidir. λ arttıkça, yani işveren için katkı oranı riskinin yükümlülüklerin yerine getirilememe riskine göre göreli önemi artıkça optimal amortisman süresinin artması beklenir [4].

4. Yatırım getirileri bir gecikmeli hareketli ortalama modeline uyduğunda performans kriteri

Herhangi bir t anında yatırım getirisi daha önceki yıl ya da yıllardaki yatırım getirisine bağlı olduğundan yani yatırım getirileri bağımlı olduğundan, bu bölümde yatırım getirilerinin MA(1) modeline uyduğu varsayımı altında fon düzeyi ve fona yapılacak katkının beklenen değeri ile varyansına ilişkin formüller verildikten sonra performans kriteri elde edilecektir.

$i(t)$ herhangi bir (t, t+1) yılına ilişkin yatırım getirisini göstermek üzere $\delta(t)=\ln(1+i(t))$, MA(1) modeline sahip olsun. Bu durumda,

$$\delta(t)=\theta+e(t)-\varphi e(t-1)$$

biçimindedir.

Burada $e(t), t=1,2,3,...$ ortalaması 0 ve varyansı γ^2 olan Normal dağılımlı bağımsız raslantı değişkenlerini göstermek üzere $\delta(t)$ ’ nin beklenen değeri, varyansı ve kovaryansı,

$$E[\delta(t)]=\theta$$
$$Var[\delta(t)]=(1+\varphi^2)\gamma^2=\nu^2$$
$$Cov[\delta(t),\delta(s)]=\begin{cases}-\varphi\gamma^2, & |t-s|=1\\ 0 & ,|t-s|>1\end{cases}$$

eşitlikleri yardımıyla bulunur [2].

$\delta(t)$, θ ortalamalı ve ν^2 varyanslı Normal dağılıma sahip rastlantı değişkeni olduğundan $e^{\delta(t)}$ beklenen değeri $E\left[e^{\delta(t)}\right]=e^{\theta+(1/2)\nu^2}=1+i$ ve varyansı $Var\left[e^{\delta(t)}\right]=e^{2\theta+\nu^2}\left(e^{\nu^2}-1\right)$ olan Lognormal dağılıma sahip rastlantı değişkenidir.

F(t+1)’ e ilişkin Eş.(6) bağımsız iki raslantı değişkeninin çarpımı olarak düşünülemeyeceğinden fon düzeyinin beklenen değeri bu eşitlikten elde edilemez. Bu nedenle fon düzeyine ilişkin bu eşitliğin bağımsız raslantı değişkenleri olarak ifade edilmesi gerekir:

$$F(1)=[1+i(1)]\,[QF_0+R]=F_0Qe^{\delta(1)}+Re^{\delta(1)}$$
$$F(2)=[1+i(2)]\,[QF(1)+R]=F_0Q^2e^{\delta(1)+\delta(2)}+R\left[Qe^{\delta(1)+\delta(2)}+e^{\delta(2)}\right]$$
$$\dots$$
$$F(t)=[1+i(t)][QF(t)+R]=F_0Q^te^{\Delta(t)}+R\sum_{j=1}^{t}Q^{t-j}e^{\Delta(t)-\Delta(j-1)} \qquad (9)$$

Burada $\Delta(t)=\sum_{u=1}^{t}\delta(u)$ biçimindedir.

Eş.(9)' dan F(t)' nin beklenen değeri:

$$\begin{aligned} E\left[F(t)\right] &= F_0 Q^t\, E\left[e^{\Delta(t)}\right] + R\sum_{j=1}^{t} Q^{t-j} E\left[e^{\Delta(t)-\Delta(j-1)}\right] \\ &= F_0 Q^t\, E\left[e^{\Delta(t)}\right] + R\sum_{s=0}^{t-1} Q^{t-s-1} E\left[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}\right] \end{aligned} \tag{10}$$

biçiminde elde edilir.

$\delta(t)\ ,t=1,2,3,...$ θ ortalamalı ve ν^2 varyanslı Normal dağılıma sahip raslantı değişkenleri olduğu için $\Delta(t)=\sum_{u=1}^{t}\delta(u)$ raslantı değişkeni; ortalaması $E\left[\Delta(t)\right]=E\left[\sum_{u=1}^{t}\delta(u)\right]=t\theta$ ve varyansı $Var\left[\Delta(t)\right]=Var\left[\sum_{u=1}^{t}\delta(u)\right]=t\nu^2-2(t-1)\phi\gamma^2$ olan Normal dağılımlı ve $e^{\Delta(t)}$ Lognormal dağılımlı raslantı değişkenleridir. Bu nedenle Eş.(10)' da,

$$E\left[e^{\Delta(t)}\right]=e^{t\theta} \tag{11}$$

biçimindedir.

$\Delta(t)-\Delta(s)$, $E\left[\Delta(t)-\Delta(s)\right]=(t-s)\theta$ ortalama ve $Var\left[\Delta(t)-\Delta(s)\right]=(t-s)\nu^2-2(t-s-1)\phi\gamma^2$ varyansı ile Normal dağılıma sahip raslantı değişkeni olduğu için Lognormal dağılıma sahip $e^{\Delta(t)-\Delta(s)}$ raslantı değişkeninin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E\left[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}\right] &= e^{(t-s)\theta+\frac{1}{2}(t-s)\nu^2-(t-s-1)\phi\gamma^2} \\ &= e^{(t-s)\left(\theta+\frac{1}{2}\nu^2\right)-(t-s-1)\phi\gamma^2} = c^{t-s}e^{-(t-s-1)\phi\gamma^2} \end{aligned} \tag{12}$$

olarak elde edilir.

Burada $c=e^{\theta+\frac{1}{2}\nu^2}$ biçimindedir.

Eş.(11) ve Eş. (12), Eş.(10)' da yerine konulursa F(t)' nin beklenen değeri,

$$E\left[F(t)\right]=F_0\, Q^t c^t e^{-(t-1)\phi\gamma^2}+\frac{Re^{\phi\gamma^2}}{Q} Q\,c\,e^{-\phi\gamma^2}\left(\frac{1-Q^t c^t e^{-\phi\gamma^2 t}}{1-Q\,c\,e^{-\phi\gamma^2}}\right) \tag{13}$$

bulunur.

Eş.(5)' in beklenen değerinde Eş.(13) konularak C(t)' nin beklenen değeri elde edilir:

$$E\left[C(t)\right]=NC+k\left[AL-E\left(F(t)\right)\right]$$

$$= NC + k\left[AL - F_0 Q^t c^t e^{-(t-1)\phi\gamma^2} + \frac{Re^{\phi\gamma^2}}{Q} Q c e^{-\phi\gamma^2}\left(\frac{1-Q^t c^t e^{-\phi\gamma^2 t}}{1-Q c e^{-\phi\gamma^2}}\right)\right] \tag{14}$$

Eş.(9)' da $F_0 = 0$ olarak alındığında $F(t) = \sum_{s=0}^{t-1} Q^{t-1-s} R\, e^{\Delta(t)-\Delta(s)}$ olduğundan,

$$F(t)^2 = \sum_{s=0}^{t-1}\sum_{r=0}^{t-1} e^{\Delta(t)-\Delta(s)}\, e^{\Delta(t)-\Delta(r)}\, Q^{t-1-s} Q^{t-1-r} R^2 \tag{15}$$

olarak elde edilir.

F(t)' nin ikinci dereceden merkezsel olmayan momentinin bulunabilmesi için,

$$E\left[e^{\Delta(t)-\Delta s)+\Delta(t)-\Delta(r)}\right] = e^{E[\Delta(t)-\Delta(s)+(\Delta(t)-\Delta(r)]+\frac{1}{2}Var[\Delta(t)-\Delta(s)+(\Delta(t)-\Delta(r)]}\quad,\quad r,s = 0,1,...,t-1 \tag{16}$$

hesaplanması gerekmektedir.

$r > s$ iken $\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r) = \Delta(r)-\Delta(s)+2\left[\Delta(t)-\Delta(r)\right]$ olduğundan Eş.(16)' daki varyans terimi,

$$\begin{aligned} Var\left[\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)\right] &= Var\left[\Delta(r)-\Delta(s)+2\left(\Delta(t)-\Delta(r)\right)\right] \\ &= Var\left[\Delta(r)-\Delta(s)\right] + 4Var\left[\Delta(t)-\Delta(r)\right] \\ &\quad + 4Cov\left[\Delta(r)-\Delta(s), \Delta(t)-\Delta(r)\right] \end{aligned} \tag{17}$$

biçiminde ifade edilebilir.

$t > r > s \geq 0$ için $Cov\left[\Delta(r)-\Delta(s), \Delta(t)-\Delta(r)\right] = -\phi\gamma^2$ olduğundan Eş.(17),

$$\begin{aligned} Var\left[\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)\right] &= (r-s)\nu^2 - 2(r-s-1)\phi\gamma^2 \\ &\quad + 4(t-r)\nu^2 - 8(t-r-1)\phi\gamma^2 - 4\phi\gamma^2 \\ &= 3\left[(t-r)+(t-s)\right]\nu^2 - 2\phi\gamma^2\left[3(t-r)+(t-s)-3\right] \\ &= H(t,r,s) \end{aligned} \tag{18}$$

olarak elde edilir.

Eş.(16)' da $E\left[\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)\right] = (t-s)\theta + (t-r)\theta$ olduğu için Eş.(16),

$$E\left[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}\right]=e^{(t-s)\theta+(t-r)\theta+\frac{1}{2}H(t,r,s)}$$
$$=e^{(t-s)\left(\theta+\frac{1}{2}v^2-\phi\gamma^2\right)}e^{(t-r)\left(\theta+\frac{3}{2}v^2-3\phi\gamma^2\right)}e^{3\phi\gamma^2} \tag{19}$$
$$=\alpha^{t-s}\beta^{t-r}\varepsilon$$

biçimini alır.

Burada $\alpha=e^{\theta+\frac{1}{2}v^2-\phi\gamma^2}$, $\beta=e^{\theta+\frac{3}{2}v^2-3\phi\gamma^2}$ ve $\varepsilon=e^{3\phi\gamma^2}$ biçimindedir.

$r=s$ için $H(t,r,s)=4\,\mathrm{Var}\left[\Delta(t)-\Delta(s)\right]$ olduğundan Eş.(16),

$$E\left[e^{2(\Delta(t)-\Delta(s)}\right]=e^{2(t-s)\theta+2\,\mathrm{Var}\left[\Delta(t)-\Delta(s)\right]}$$
$$=e^{(t-s)\left(\theta+\frac{1}{2}v^2-\phi\gamma^2\right)+(t-s)\left(\theta+\frac{3}{2}v^2-3\phi\gamma^2\right)+4\phi\gamma^2}$$
$$=\left(\alpha\beta\right)^{t-s}\varepsilon\, e^{\phi\gamma^2} \tag{20}$$

olarak elde edilir.

Eş.(15)' in beklenen değerinde Eş.(19) ve Eş.(20) yerine konulursa F(t)' nin ikinci dereceden merkezsel olmayan momenti,

$$E\left[F(t)^2\right]=E\left[\sum_{s=0}^{t-1}\sum_{r=0}^{t-1}e^{\Delta(t)-\Delta(s)}e^{\Delta(t)-\Delta(r)}Q^{t-1-s}Q^{t-1-r}R^2\right]$$
$$=\frac{2R^2}{Q^2}\sum_{r=1}^{t-1}\sum_{s=0}^{r-1}Q^{t-s}Q^{t-r}E\left[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}\right]+\frac{R^2}{Q^2}\sum_{s=0}^{t-1}Q^{2(t-s)}E\left[e^{2((\Delta(t)-\Delta(s))}\right]$$
$$=\frac{2R^2\varepsilon\alpha}{Q(1-Q\alpha)}\left[\frac{Q^2\alpha\beta(1-Q^{2t}\alpha^t\beta^t)}{1-Q^2\alpha\beta}-\frac{Q\alpha^t\beta Q^t(1-Q^t\beta^t)}{1-Q\beta}\right] \tag{21}$$
$$+\frac{R^2\varepsilon\, e^{\phi\gamma^2}}{Q^2}\frac{Q^2\alpha\beta(1-Q^{2t}\alpha^t\beta^t)}{(1-Q^2\alpha\beta)}$$

elde edilir.

Yatırım getirileri MA(1) modeline uyduğu varsayıldığında Eş.(13) ve Eş(21)' den F(t)' nin varyansı:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}F(t) = {} & \frac{2R^2\varepsilon\alpha}{Q(1-Q\alpha)(1-Q^2\alpha\beta)} Q^2\alpha\beta\left(1-Q^{2t}\alpha^t\beta^t\right) \\
& - \frac{2R^2\varepsilon\alpha}{Q(1-Q\alpha)(1-Q\beta)} Q\alpha^t\beta Q^t\left(1-Q^t\beta^t\right) + \frac{R^2\varepsilon e^{\varphi\gamma^2}}{Q^2(1-Q^2\alpha\beta)} Q^2\alpha\beta\left(1-Q^{2t}\alpha^t\beta^t\right) \\
& - F_0^2 Q^{2t} c^{2t} e^{-2(t-1)\varphi\gamma^2} - R^2 c^2 \frac{\left(1-Q^t c^t e^{-\varphi\gamma^2 t}\right)^2}{\left(1-Qce^{-\varphi\gamma^2}\right)^2} \\
& - 2F_0 Q^t c^{t+1} R e^{-(t-1)\varphi\gamma^2}\left(\frac{1-Q^t c^t e^{-\varphi\gamma^2 t}}{1-Qce^{-\varphi\gamma^2}}\right)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

olarak bulunur.

$t \to \infty$ için F(t) ve C(t)' nin varyansı,

$$
\lim_{t\to\infty} \operatorname{Var}\left[F(t)\right] = \frac{2R^2\varepsilon\alpha}{(1-Q\alpha)}\frac{Q\alpha\beta}{(1-Q^2\alpha\beta)} + \frac{R^2\varepsilon\, e^{\varphi\gamma^2}\alpha\beta}{(1-Q^2\alpha\beta)} - \frac{R^2\alpha^2 e^{2\varphi\gamma^2}}{(1-Q\alpha)^2} \tag{23}
$$

$$
\lim_{t\to\infty} \operatorname{Var}C(t) = k^2 \lim_{t\to\infty} \operatorname{Var}F(t) \tag{24}
$$

biçimindedir.

$Q\alpha < 1$ ve $Q^2\alpha\beta < 1$ olduğunda $\lim_{t\to\infty} \operatorname{Var}F(t)$ yakınsaktır. Bu durumda optimal amortisman süresi m^*,

$$
m^* < m_1 = \frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}-1}{v\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)-1}\right),\; v = \frac{1}{1+i} \tag{25}
$$

eşitsizliğini sağlar.

Eş.(25)' de m_1, amortisman süresinin olası maksimum değerini göstermektedir [7].

Eş.(22), Eş.(8)' de yerine konularak yatırım getirileri MA(1) modeline uyduğu varsayıldığında performans kriteri,

$$J_\infty = \left(\lambda k^2 + 1 - \lambda\right)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2R^2\varepsilon\alpha^2\beta\, w\, Q}{\left(1-Q\alpha\right)\left(1-w\right)\left(1-wQ^2\alpha\beta\right)} - \dfrac{2R^2\varepsilon\alpha^2\beta\, wQ}{\left(1-Q\alpha\right)\left(1-w\alpha Q\right)\left(1-w\alpha Q^2\beta\right)} \\ + \dfrac{R^2\varepsilon\, e^{\varphi\gamma^2}\alpha\beta\, w}{\left(1-w\right)\left(1-wQ^2\alpha\beta\right)} - \dfrac{F_0^2\, e^{2\varphi\gamma^2}}{\left(1-wQ^2c^2e^{-2\phi\gamma^2}\right)} \\ - \dfrac{R^2c^2}{\left(1-Qce^{-\varphi\gamma^2}\right)^2}\left[\dfrac{1}{1-w} - \dfrac{2}{1-wQce^{-\varphi\gamma^2}} + \dfrac{1}{1-wQ^2c^2e^{-2\varphi\gamma^2}}\right] \\ - \dfrac{2F_0Rc^2wQ}{\left(1-wQce^{-\varphi\gamma^2}\right)\left(1-wQ^2ce^{-2\varphi\gamma^2}\right)} \end{array}\right\} \qquad (26)$$

biçiminde elde edilir.

Eş.(26)' yı minimum yapan k değeri (k^*) hesaplandıktan sonra optimal amortisman süresi m^*,

$$m^* = -\frac{\ln(1-d/k^*)}{\ln(1+i)}, d = \frac{i}{1+i} \qquad (27)$$

bulunur.

5. Optimal amortisman süresinin olası maksimum değerlerinin hesaplanması

Bölüm 4' de belirtildiği gibi, $t \to \infty$ için F(t) ve C(t)' nin varyanslarının limiti yakınsaktır ve optimal amortisman süresi Eş.(25) ile verilen eşitsizliği sağlamaktadır.

$\varphi > 0.1$ için $\varphi^2\alpha\beta < 1$ eşitsizliği sağlanmadığından φ' nin negatif değerleri için olası maksimum amortisman süresi hesaplanmıştır.

i, φ ve ν' nin farklı kombinasyonları için hesaplanan olası maksimum amortisman süreleri Çizelge 1' de verilmiştir.

Çizelge 1. Yatırım getirileri MA(1) modeline uyduğunda i, φ ve ν' nin farklı kombinasyonları için hesaplanan olası maksimum amortisman süresi

ν	φ			
	-0.7	**-0.5**	**-0.3**	**-0.1**
***i* =1 %**				
0.01	427.6412	437.7529	458.9239	499.6486
0.05	133.7307	141.3590	157.9135	191.6913
0.10	**53.3070**	**57.6235**	**67.4751**	**89.5474**
0.15	27.4252	29.9296	35.8134	49.8228
***i* =3 %**				
0.01	180.8016	184.2364	191.4186	205.2062
0.05	75.6272	78.7199	85.2810	98.1697
0.10	**38.2649**	**40.6236**	**45.7898**	**56.5022**
0.15	22.4414	24.1316	27.9470	36.3129

Çizelge 1' den herhangi bir φ için yatırım getirisinin varyansı ν ve beklenen yatırım getirisi i arttıkça olası maksimum amortisman süresinin azaldığı ve φ' nin değeri arttıkça olası maksimum amortisman süresinin arttığı söylenir.

Beklenen yatırım getirisi arttığında, fonlanmamış yükümlülük azalacağından amortisman süresinin azalması beklenen bir sonuçtur. Bunun yanısıra, yüksek getirili yatırımda yatırım getirisinin değişkenliği de yüksek olacağından fonlanmamış yükümlülük dolayısıyla amortisman süresi azalır.

6. Performans kriterini minimum yapan optimal amortisman süresinin belirlenmesi

Bu bölümde yatırım getirilerinin MA(1) modeline uyumlu olması halinde Eş.(26)' da verilen performans kriterini minimum yapan k belirlendikten sonra Eş.(27)' den optimal amortisman süresi hesaplanmış; optimal amortisman süresinin model parametresi ve beklenen getiri oranındaki değişiklikten nasıl etkilendiği araştırılmıştır.

$\lambda = 0, 0.2, 0.5, 0.8, 1$, $\varphi = -0.7, -0.5, -0.3, -0.1$ ve $i = 0.01$ için hesaplanan optimal amortisman süreleri Çizelge 2' de, $i = 0.03$ için hesaplanan optimal amortisman süreleri ise Çizelge 3' de verilmiştir.

Çizelge 2. Beklenen getiri oranı $i = 0.01$ ve $\nu = 0.10$ için hesaplanan optimal amortisman süresi

λ \ φ	**-0.7**	**-0.5**	**-0.3**	**-0.1**
0	7.2115	22.4487	50.9978	89.5474
0.2	10.5211	22.7196	51.0155	89.5474
0.5	13.3665	23.4063	51.0682	89.5474
0.8	17.4237	25.3524	51.2723	89.5474
1	53.3070	57.6235	67.4751	89.5474

Çizelge 2 incelendiğinde herhangi bir λ için model parametresi φ ile optimal amortisman süresinin ve herhangi bir $\varphi \le -0.3$ için λ ile optimal amortisman süresinin doğru orantılı olduğu, $\varphi = -0.1$ için optimal amortisman süresinin, λ' daki değişimden etkilenmediği ve Eş.(25)' den hesaplanan olası maksimum amortisman süresine eşit olduğu, φ arttıkça optimal amortisman süresindeki değişimin azaldığı söylenebilir. $\lambda = 1$ için hesaplanan optimal amortisman süresi, Çizelge 1' de verilen amortisman süresinin olası maksimum değerine eşit olduğu görülmektedir.

Çizelge 3. Beklenen getiri oranı $i = 0.03$ ve $\nu = 0.10$ için hesaplanan optimal amortisman süresi

λ \ φ	**-0.7**	**-0.5**	**-0.3**	**-0.1**
0	6.8154	18.9488	36.9762	56.5022
0.2	9.8831	19.2093	36.9933	56.5022
0.5	12.4056	19.8548	37.0442	56.5022
0.8	15.8605	21.5175	37.2388	56.5022
1	35.3234	38.7675	45.7898	56.5022

Beklenen yatırım getirisindeki artış fonlanmamış yükümlülüğün azalmasına neden olacağından herhangi bir anda ortaya çıkan fon fazlası ya da açığının daha kısa sürede amortize edilmesi beklenilir. Çizelge 2 ve

Çizelge 3' deki sonuçlar karşılaştırıldığında beklenen yatırım getirisindeki artışın optimal amortisman süresinde azalışa neden olduğu görülmektedir.

7. Sonuç

Bu çalışmada, katkı oranı riski ile yükümlülüklerin yerine getirilememe riskinin minimum olması için işverenin kontrolü altındaki önemli parametrelerden biri olan amortisman süresinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla katkı oranı riski ile yükümlülüklerin yerine getirilememe riskininin ağırlıklı ortalamasından oluşan performans ölçütünü minimum yapan süre belirlenmiş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Yatırım getirilerinin MA(1) modeline uyduğu varsayıldığında katkı oranı riski ile yükümlülüklerin yerine getirilememe riskininin ağırlıklı ortalamasından oluşan performans kriterine ilişkin eşitlik elde edildikten sonra, bu kriteri minimum yapan amortisman süresi belirlenmiş; optimal amortisman süresinin model parametresinin aldığı değer ile beklenen getiri oranındaki değişikliklerden nasıl etkilendiği araştırılmıştır. Beklenen yatırım getirisindeki artışın optimal amortisman süresinde azalışa neden olduğu, yatırım getirisinin varyansı arttıkça optimal amortisman süresinin azaldığı ve model parametresinin değeri arttıkça optimal amortisman süresinin arttığı görülmüştür.

Yatırım getirileri bağımlı olduğundan, emeklilik fonu hangi yatırım aracına yatırılırsa o yatırım aracının geçmiş yıllardaki getiri oranları incelenerek uygun zaman serisi modeli belirlendikten sonra, optimal amortisman süresinin belirlenmesi gerekir.

Kaynaklar

[1] G. Kingsland, (1982), Combining Financial and Actuarial Risk: Simulation Analysis", Journal of Finance 37, pp. 604-606.

[2] G.E. Box, G.M. Jenkins, (1976), Time Series Analysis Forecasting and Control, Holden-Day.

[3] J-F. Boulier, E.Trussant, D. Florens, (1995), A Dynamic Model for Pension Funds Management, Proceeding of 5th AFIR International Colloquium 1, pp. 361-384.

[4] J-F. Ricardo, J.P. Rincon-Zapatero, (2001), Minimization of Risks in Pension Funding by Means of Contribution and Portfolio Selection, Insurance: Mathematics and Economics 29, pp. 35-45.

[5] M.I. Owadally, S. Haberman, (1999), Pension Fund Dynamics and Gains and Losses Due to Random Rates of Return. North American Actuarial Journal 3, 105-177.

[6] S. Haberman, Z. Butt, C. Megaloudi, (2000), Contribution and Solvency Risk in a Defined Benefit Pension Scheme. Insurance: Mathematics and Economics 27, 237-259.

[7] S. Haberman, L.Y.P. Wong, (1997), Moving Average Rates of Return and the Variability of Pension Contributions and Fund Levels for a Defined Benefit Pension Scheme. Insurance:Mathematics and Economics 20, 115-135.

[8] S. Haberman, (1994), Pension Funding Modelling and Stochastic Investment Returns. ActuarialResearch Paper No. 62, City University, London, UK.