



Snap-buckling and post-buckling analyses of fixed supported beams having initially small circular imperfection under the effect of uniformly distributed vertical load

Ayfer Tekin Atacan*^{ID}, Receb Faruk Yükseler^{ID}

Department of Civil Engineering, Faculty of Civil Engineering, Yildiz Technical University, Istanbul, 34220, Turkey

Highlights:

- Effects of a geometric parameter on the buckling values and the post-buckling behavior
- Deformed shapes of the initially imperfect beam during various stages of deformation
- Distributions of internal forces during various stages of loading

Keywords:

- Snap-buckling
- Initially imperfect beam
- Nonlinear equations
- Finite difference method
- Displacement-controlled Newton-Raphson method

Graphical/Tabular Abstract

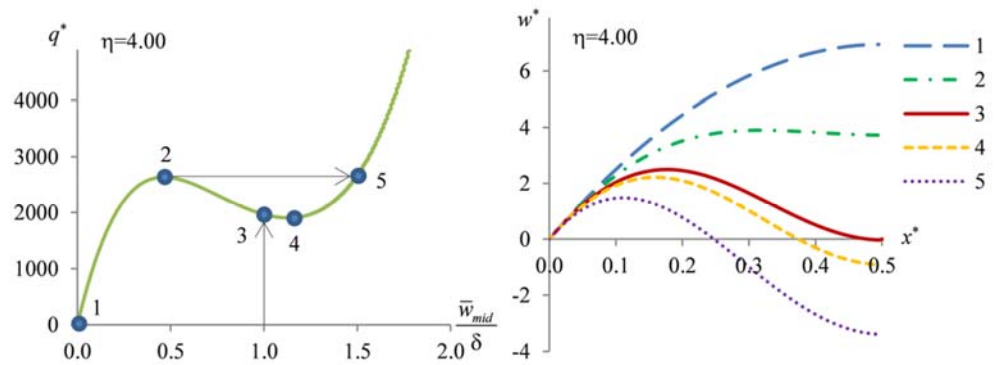


Figure A. Equilibrium paths of a fixed beam having initially small circular imperfection and deformed shapes at various stages of deformation

Article Info:

Research Article
Received: 23.12.2020
Accepted: 12.09.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.845996

Correspondence:

Author: Ayfer Tekin Atacan
e-mail : atekin@yildiz.edu.tr
phone:+90 212 383 5147

Purpose: In this study, snap-buckling and post-buckling behavior of fixed beams having initially small circular imperfection under lateral loading is examined. In addition to the effects of a geometric parameter (which is a function of the thickness, radius and central angle of the circular neutral line of the undeformed beam) on buckling values, its effects on support reactions and internal forces are also investigated.

Theory and Methods:

The governing differential equations obtained within the framework of the Euler-Bernoulli beam theory are transformed into algebraic equations with the help of the finite difference method. The resulting nonlinear algebraic equations are solved by the displacement-controlled Newton-Raphson method. By drawing load-deflection graphs, the effects of the concerning geometric parameter on the buckling values and the post-buckling behavior are analyzed.

Results:

Unlike the previous studies on the subject; the variations of the support reactions, the diagrams of the deformed shapes of the fixed beams having initially small circular imperfection as well as the diagrams of the internal forces at various stages of the loading including the buckling and post-buckling states are investigated for various values of the geometric parameter.

Conclusion:

For fixed beams having an initially small imperfection under a vertical loading, not only the bending behavior but also the stability behavior should be examined. A geometric parameter which can be defined according to the geometry of an initially imperfect beam can have significant effects on the equilibrium paths, buckling values, support reactions, deformed shapes, and internal forces.



Çembersel küçük bir ilkel kusura sahip düzgün yayılı düşey yük etkisindeki ankastre mesnetli kirişlerin vurgu burkulması ve burkulma sonrası analizleri

Ayfer Tekin Atacan*^{ID}, Receb Faruk Yükseler^{ID}

Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul, 34220, Türkiye

Ö N E Ç İ K A N L A R

- Geometrik bir parametrenin burkulma değerleri ve burkulma sonrası davranışı üzerindeki etkileri
- Şekil değiştirmenin çeşitli aşamalarında ilkel kusurlu kirişin şekil değiştirmiş geometrileri
- Yüklemenin çeşitli aşamalarında iç kuvvetlerin dağılımları

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 23.12.2020

Kabul: 12.09.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.845996

Anahtar Kelimeler:

Vurgu burkulması,
ilkel kusurlu kiriş,
doğrusal olmayan
denklemler,
sonlu farklar yöntemi,
yer değiştirme kontrollü
Newton-Raphson yöntemi

ÖZ

Bu çalışmada; düzgün yayılı düşey yük etkisindeki, başlangıçta küçük bir çembersel kusura sahip ankastre mesnetli kirişlerde, vurgu stabilitesi ve burkulma sonrası davranışlar incelenmektedir. İlkel kusurlu kirişin geometrisi ile ilgili bir parametrenin, burkulma değerleri ve burkulma sonrası davranış üzerindeki etkisinin yanı sıra ilkel kusurlu kirişin şekil değiştirmiş geometrisi, mesnet tepkileri ve iç kuvvetler üzerindeki etkileri de araştırılmıştır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde elde edilen doğrusal olmayan yönetici diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için sonlu farklar yöntemi ve yer değiştirme kontrollü Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır. Geometrik parametrenin; burkulma değerleri, ilkel kusurlu kirişin şekil değiştirmiş geometrisi, mesnet tepkileri ve iç kuvvetleri üzerinde önemli bir etkisi olduğu gözlemlenmiştir.

Snap-buckling and post-buckling analyses of fixed supported beams having initially small circular imperfection under the effect of uniformly distributed vertical load

H I G H L I G H T S

- Effects of a geometric parameter on the buckling values and the post-buckling behavior
- Deformed shapes of the initially imperfect beam during various stages of deformation
- Distributions of internal forces during various stages of loading

Article Info

Research Article

Received: 23.12.2020

Accepted: 12.09.2021

DOI:

10.17341/gazimmfd.845996

Keywords:

Snap-buckling,
initially imperfect beam,
nonlinear equations,
finite difference method,
displacement-controlled
Newton-Raphson method

ABSTRACT

In this study, snap-buckling and post-buckling behaviors of fixed beams having initially small circular imperfection subjected to uniformly distributed vertical loads are examined. The effect of a parameter related to the geometry of the initially imperfect beam on the buckling values as well as the deformed shapes of the initially imperfect beam, support reactions and internal forces are investigated. The finite difference method and the displacement-controlled Newton-Raphson method are used for the numerical solution of the nonlinear governing differential equations obtained within the framework of the Euler-Bernoulli beam theory. It is observed that the concerning geometric parameter significantly effects the buckling values, deformed shapes of the initially imperfect beam, support reactions and internal forces.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Narin bir kiriş elemanında başlangıçta (üretim veya nakliye esnasında) oluşabilecek bir geometrik kusur, titreşim analizinde [1] ve burkulma davranışı [2] üzerinde önemli etkiler oluşturabilmektedir. Geometrik kusur ne kadar küçük olursa olsun, ilkel kusurlu kirişlerin (veya sığ kemerlerin) düşey yükler altındaki davranışı, düz bir kirişin davranışından farklı olmaktadır. Düşey yük etkisi altındaki düz bir kiriş, sadece eğilmeye maruz kalırken [3, 4]; başlangıçta küçük bir geometrik kusuru olan bir kiriş, eğilme ile birlikte burkulmaya da maruz kalabilmektedir. Bu sebeple; düşey yük etkisindeki ilkel kusurlu bir kirişin stabilitesini koruyarak taşıyabileceği en büyük yük değerinin de araştırılması gerekmektedir.

Geometrik doğrusal olmayan bir problem olan vurgu stabilitesi problemi, yük-çökme eğrilerinin çizimi ile incelenebilmektedir. İlgili eğriler ile burkulma yükü ve burkulma çökmesi değerlerinin bulunabilmesine ek olarak burkulma öncesi ve sonrasına ait davranışların da incelenmesi mümkün olmaktadır. Analitik, sayısal ve deneysel çözüm yöntemleri kullanılarak, eğri eksenli çubukların vurgu stabilitesi davranışını inceleyen çeşitli çalışmalar bulunmaktadır. Medina vd. [2], eksenel ve elektrostatik kuvvetlerin etkisi altındaki kavisli mikro-kirişlerin burkulma analizi üzerinde deneysel olarak çalışmışlardır. Tekil yük etkisindeki sığ kemerlerin incelenmesi ile ilgili çalışmalara örnek olarak [5-7] yayınları verilebilir. Gjelsvik ve Bodner [5], ankastre mesnetli sığ çembersel kemerlerin burkulma kuvvetlerini, enerji yöntemini kullanarak yaklaşık bir çözüm yöntemi ile elde etmişlerdir. Cai ve Feng [6], elastik dönen mesnetli sığ parabolik kemerlerin incelenmesini, virtüel iş formülasyonu ile gerçekleştirmişlerdir. Kritik yük değerlerini, hem simetrik vurgu stabilitesi hem de antisimetrik dallanma tipi stabilite için belirlemişlerdir. Bradford vd. [7], mafsallı ve ankastre mesnetli sığ çembersel kemerlerin burkulma yüklerinin analitik çözümünü virtüel iş ilkesi yardımıyla elde etmişlerdir. Zhang vd. [8], tekil yük etkisindeki ankastre mesnetli laminalı sığ çembersel kemerlerin burkulma analizini, klasik lamina teorisine dayanarak yapmışlardır.

Yüklemenin değişmesiyle birlikte, burkulma davranışlarında da önemli farklılıklar görülmeye rağmen; yeterince sığ kemerlerde, açıklık boyunca düzgün yayılı düşey yüklemeye ile kemer eksenine boyunca düzgün yayılı radyal yüklemeye karşı gelen sonuçlar birbirine benzer olmaktadır. Cai vd. [9], açıklık boyunca düzgün yayılı düşey yüklü ankastre mesnetli sığ parabolik kemerlerde simetrik ve antisimetrik burkulma modlarına karşı gelen burkulma yüklerinin analitik hesabını, virtüel iş ilkesi yardımı ile vermişlerdir. Hu vd. [10], açıklık boyunca düzgün yayılı düşey yük etkisindeki, ankastre mesnetli, çeşitli basıklık oranlarındaki parabolik kemerlerin burkulma ve burkulma sonrası analizleri için kapalı-formda bir analitik çözüm önermişlerdir. Bradford vd. [11], elastik mesnetli sığ parabolik kemerlerin açıklık boyunca düzgün yayılı düşey yüklemeye altındaki doğrusal olmayan davranışlarının analitik çözümlerini elde etmişlerdir. Pi vd. [12] mafsallı ve ankastre mesnetlenmiş, Pi vd. [13] ise elastik mesnetli çembersel kemerlerin, eksenleri boyunca düzgün

yayılı yük etkisi altında meydana gelen burkulma yüklerinin analitik çözümlerini vermişlerdir. Tsiatas vd. [14], şekil bellekli (shape memory alloy) malzemenin yapılmış sığ çembersel kemerlerin, eksenine boyunca düzgün yayılı radyal yüklemeye etkisinde doğrusal olmayan burkulma ve burkulma sonrası davranışlarını araştırmışlardır. İlgili problemin çözümünde, sınır eleman tabanlı bir yöntem olan analog denklem yöntemi ve yer değiştirme kontrollü Newton-Raphson yöntemini kullanmışlardır.

Burkulma sonrası davranışları inceleyen çalışmalarda; burkulma öncesinde, burkulma sırasında ve sonrasında küçük ilkel kusurlu kiriş (sığ kemer) eksenlerinin şekil değişimi ile aldıkları şekilleri sunan ve ilkel kusurlu kirişteki iç kuvvetlerin dağılımını inceleyen az sayıda çalışma ile karşılaşılacaktır. Moon vd. [15] sığ, parabolik, mafsallı kemerlerin düzgün yayılı düşey yük etkisi altında vurgu-tipi burkulma kuvvetlerini hesaplanmış ve narinlik oranı ile basıklık oranının, burkulma moduna etkisini incelemişlerdir. Rubin [16], tekil yük etkisi altındaki ankastre mesnetli çembersel kemerlerin, şekil değiştirmeden sonraki geometri ile burkulma kuvveti değerlerini Cosserat teorisi yardımıyla sayısal olarak vermiştir. Luu ve Lee [17], tekil yük etkisi altındaki yarı-eliptik kemerlerin burkulma ve burkulma sonrası davranışlarını; izogeometrik analiz çerçevesinde, yay-boyu yöntemini kullanarak çeşitli mesnet koşulları için incelemişlerdir. Yüklemenin çeşitli aşamalarında, yarı-eliptik kemerin şekil değiştirmiş geometri elde edilmiştir. Tsiatas ve Babouskos [18], tekil yük etkisindeki, değişken kesitli sığ çembersel kemerlerin doğrusal ve geometrik doğrusal olmayan davranışlarını integral denklem sayısal yöntemi ile birlikte yay-boyu yöntemini kullanarak araştırmışlardır. Çalışmada ele alınan bir problemde yüklemenin çeşitli aşamalarına ait yer değiştirme, eksenel kuvvet, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları sunulmuştur. Tekil ve sinusoidal yüklemeye maruz sinusoidal küçük bir ilkel kusura sahip mafsallı kirişlerin burkulma analizi, ilkel kusurlu kirişin şekil değiştirme sonrasındaki geometrisini ve yüklemenin çeşitli aşamalarına karşılık gelen iç kuvvetlerin dağılımını içermek üzere sırasıyla, Tekin Atacan ve Yükseler tarafından [19, 20]'de sunulmuştur. Ancak, açıklık boyunca düzgün yayılı yük etkisindeki, küçük bir çembersel ilkel kusura sahip ankastre mesnetli kirişlerde burkulma ve burkulma sonrasındaki şekil değiştirmiş geometri ile iç kuvvet dağılımlarını inceleyen bir çalışmayla karşılaşılacaktır.

Bu çalışmada, açıklık boyunca düzgün yayılı yüklü, iki ucu ankastre olarak mesnetli, küçük bir çembersel ilkel kusura sahip kirişlerin vurgu stabilitesi davranışı incelenmektedir. Geometrik doğrusal olmayan problemin diferansiyel yönetici denklemleri, sonlu farklar yöntemi kullanılarak cebirsel denklemlere dönüştürülmüş ve sayısal çözüm, yer değiştirme kontrollü Newton-Raphson yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Boyutsuz geometrik bir parametrenin burkulma yükü ve burkulma yer değiştirmesi üzerindeki etkileri, yük-orta noktadaki yer değiştirme grafikleri çizilerek belirlenmiştir. Konuyla ilgili önceki çalışmalardan farklı olarak; ele alınan problemde, küçük bir çembersel ilkel kusura sahip ankastre mesnetli kirişin orta noktasındaki düşey yer değiştirmenin ve dış yükün değişimlerinin mesnet

tepkileri üzerindeki etkileri boyutsuz geometrik parametrenin çeşitli değerleri için verilmektedir. Ayrıca, boyutsuz geometrik parametrenin, yüklemenin çeşitli aşamalarındaki (burkulma ve burkulma sonrası durumlar dahil) küçük bir çembersel ilkel kusura sahip ankastre mesnetli kirişlerin şekil değiştirme sonrasındaki geometrilerine; efektif kesme kuvveti, eğilme momenti ve dönme açısı diyagramlarına etkisi incelenmektedir. Çalışmada, ilgili literatüre ve mühendislik uygulamalarına katkı sağlayabilecek özgün sonuçlar sunulmaktadır.

2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL MODELİ (MATHEMATICAL MODEL OF THE PROBLEM)

Bu çalışmada; başlangıçta küçük bir çembersel ilkel kusura sahip, ankastre mesnetli elastik kirişin düzgün yayılı düşey yük etkisindeki vurgu stabilitesi problemi incelenmektedir. İlkel kusurlu kirişin geometrisi, yükleme durumu ve mesnet tepkilerinin (yatay mesnet tepkisi H , düşey mesnet tepkisi V_m , mesnet momenti M_m) pozitif yönleri Şekil 1'de gösterilmektedir. Burada; çembersel ilkel kusurun eğrilik yarıçapı R , genişliği δ , merkez açısı 2θ , iki ankastre mesnet arasındaki yatay uzunluk L , açıklık boyunca düzgün yayılı düşey yük q ile gösterilmektedir. İlkel kusurlu kirişin en kesitinin geometrisi dikdörtgen olup, genişliği b ve kalınlığı t ile verilmektedir. Eksen takımı (x,z) 'nin başlangıç noktası soldaki mesnet üzerinde seçildiğinde, ilkel kusurun düşey koordinatı Eş. 1 ile ifade edilebilmektedir:

$$w_o(x) = (\delta - R) + \sqrt{R^2 - \left(x - \frac{L}{2}\right)^2}. \quad (1)$$

En kesit kalınlığının açıklığa oranı oldukça küçük olan ilkel kusurlu narin kirişe ait kinematik ilişkiler Euler-Bernoulli hipotezi yardımıyla Eş. 2 ile verilebilmektedir:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_0 + \varepsilon_b, \quad \varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = 0. \quad (2)$$

Enine normal ve kayma şekil değiştirmeleri ihmal edilmiştir. Tarafsız eksen üzerindeki aksel şekil değiştirme ε_0 ve eğilme şekil değiştirme ε_b Eş. 3 ve Eş. 4 ifadeleri ile tanımlanabilmektedir [21]:

$$\varepsilon_0 = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x}^2 - w_{o,x}^2), \quad (3)$$

$$\varepsilon_b = -z\bar{\kappa}, \quad \bar{\kappa} = \bar{w}_{,xx}. \quad (4)$$

Burada; eğrilikteki değişim $\bar{\kappa}$, şekil değiştirmiş ilkel kusurlu kirişin nihai konumunun z eksenine doğrultusundaki bileşeni w ile gösterilmektedir. u , yatay yer değiştirmedir. $(.)_{,x}$, x değişkenine göre türevi göstermektedir. Düşey yer değiştirme \bar{w} olup, ilkel kusurlu kirişin herhangi bir noktasının şekil değiştirmeden önceki (w_o) ve sonraki (w) düşey konumları arasındaki ilişki Eş. 5 ile verilmektedir:

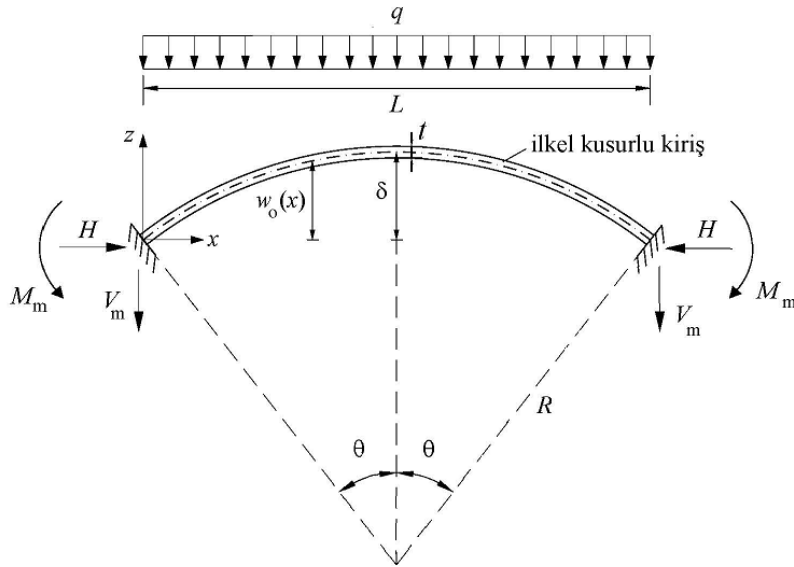
$$w = w_o + \bar{w}. \quad (5)$$

Benzer şekilde; Eş. 6 ile ifade edilen nihai dönme açısı $\varphi(x)$, ilkel kusur sebebiyle başlangıçta var olan dönme açısı $\varphi_o(x)$ ile şekil değişimi sonrasında meydana gelen dönme açısı $\bar{\varphi}(x)$ 'in toplamından oluşmaktadır:

$$\varphi = \varphi_o + \bar{\varphi}. \quad (6)$$

Dönme açısı ile ilgili kinematik ilişkiler Eş. 7'de verildiği gibi ifade edilebilir:

$$\varphi = w_{,x}, \quad \bar{\varphi} = \bar{w}_{,x}, \quad \varphi_o = w_{o,x}. \quad (7)$$



Şekil 1. Küçük bir çembersel ilkel kusura sahip kirişin şekil değişimi öncesi geometrisi, yükleme ve mesnetlenme durumları (Geometry, loading and support conditions of an undeformed beam having initially small circular imperfection)

Denge denklemleri ve doğal sınır koşullarının elde edilmesi amacıyla, virtüel iş ilkesi Eş. 8'de verildiği gibi kullanılabilir:

$$\delta W = \int_0^L (N \delta \varepsilon_0 + M \delta \bar{\kappa} - q \delta \bar{w}) dx = 0. \quad (8)$$

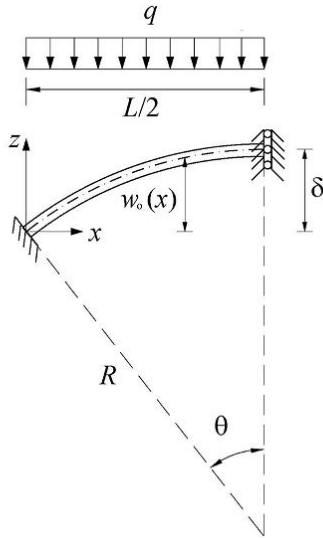
Normal kuvvet N ve eğilme momenti M ifadeleri, sırasıyla, normal gerilme σ_{xx} cinsinden Eş. 9 ve Eş. 10'da verildiği gibi ifade edilebilmektedirler [22]:

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA, \quad (9)$$

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA. \quad (10)$$

Burada, iç kuvvetlerin (N , M) işaret kuralları, Tekin Atacan ve Yükseler [20] çalışmasında belirtilen tarzdadır. İlkel kusur küçük olduğundan, normal kuvvetin kiriş boyunca değişimi ihmal edilecektir.

Yükleme ve mesnetlenmenin simetrisinden dolayı, kirişin yarısı ile analiz yapılabilmektedir (Şekil 2). Kirişin ortasında dönme açısı ve kesme kuvveti sıfır olduğundan, yarım bölgenin sağ ucunda kayıcı ankastre mesnet kullanılmıştır.



Şekil 2. Küçük bir çembersel ilkel kusura sahip kirişin yarım bölgesi
(Half region of the beam having initially small circular imperfection)

Şekil 2 ile tanımlanan yarım bölge için, Eş. 3 ve Eş. 4 denklemleri Eş. 8'de kullanıldığında, Eş. 11 elde edilebilmektedir:

$$\delta W = \int_0^{L/2} \left(N \left[\delta u_{,x} + \frac{1}{2} (\delta w_{,x}^2 - \delta w_{o,x}^2) \right] + M \left[\delta \bar{w}_{,xx} \right] + \right. \\ \left. - q [\delta \bar{w}] \right) dx = 0 \quad (11)$$

Eş. 5'in, Eş. 11'de kullanılması ve gerekli kısmi integrasyon işlemlerinin yapılmasından sonra, Eş. 12 elde edilebilmektedir:

$$\delta W = \int_0^{L/2} \left[(N_{,x}) \delta u + (-N w_{,xx} + M_{,xx} - q) \delta \bar{w} \right] dx + \\ + \left[(N) \delta u + (N w_{,x} - M_{,x}) \delta \bar{w} + (M) \delta \bar{w}_{,x} \right]_0^{L/2} = 0 \quad (12)$$

Eş. 12'den sırasıyla yatay, düşey denge denklemleri (Euler denklemleri) Eş. 13 ile:

$$N_{,x} = 0, \quad N w_{,xx} - M_{,xx} + q = 0, \quad (13)$$

ve doğal sınır koşulları Eş. 14 ile ifade edilebilmektedirler (Hildebrand [23]; Yükseler [24]):

$$N = 0 \quad \text{veya} \quad u = 0, \\ N w_{,x} - M_{,x} = 0 \quad \text{veya} \quad \bar{w} = 0, \\ M = 0 \quad \text{veya} \quad \bar{w}_{,x} = 0. \quad (14)$$

Şekil 2 ile tanımlanan yarım bölgedeki mesnetlendirme göz önüne alındığında, söz konusu probleme ait sınır koşulları Eş. 15 ile verilmektedir:

$$u|_{x=0} = \bar{w}|_{x=0} = \bar{\varphi}|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=L/2} = \bar{\varphi}|_{x=L/2} = (N w_{,x} - M_{,x})|_{x=L/2} = 0. \quad (15)$$

Eş. 15'de parantez içinde bulunan ifadenin, normal kuvvet ile elementer teoride tanımlanan [22] kesme kuvveti ($Q=M_{,x}$)'nin düşey bileşenlerinin yaklaşık toplamı olduğu not edilerek, Eş. 16 yazılabilir:

$$-V = N w_{,x} - M_{,x}. \quad (16)$$

Burada, V efektif kesme kuvveti olarak adlandırılmakta olup [20], Eş. 13 ile ifade edilmiş olan düşey doğrultudaki denge denklemi Eş. 17 şeklinde de sunulabilmektedir:

$$V_{,x} - q = 0. \quad (17)$$

Efektif kesme kuvveti; Eş. 5, Eş. 7 ve Eş. 15 yardımıyla Eş. 18'de görüldüğü gibi verilebilmektedir:

$$V = M_{,x} - H (\varphi_0 + \bar{\varphi}). \quad (18)$$

Burada; $H(x)$, normal kuvvet ve kesme kuvvetinin yatay bileşenlerinin toplamı olan yatay iç kuvveti ifade etmektedir. Ayrıca, yatay mesnet tepkisine ve (ilkel kusurun çok küçük olması sebebiyle) yaklaşık olarak normal kuvvete de eşit olmaktadır.

Şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu varsayımı ile Hooke yasası Eş. 19 ile hatırlanabilir [22]:

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} . \quad (19)$$

Burada, E elastisite modülünü göstermektedir.

Normal kuvvet ifadesi; Eş. 2-7, Eş. 9, Eş. 15 ve Eş. 19 kullanılarak, Eş. 20 ile verildiği gibi elde edilebilmektedir (Arefi ve Nahvi [25]):

$$N = \frac{EA}{L} \int_0^{L/2} (\varphi_0^2 - \varphi^2) dx = H . \quad (20)$$

Bu aşamada, yatay yer değiştirme u 'nun bilinmeyen listesinden çıkarılmış olduğu not edilebilir. Bu cümle, eksenel yer değiştirme ve eksenel şekil değiştirmenin ihmal edildiği anlamında değildir.

Moment-eğrilik ifadesi, Eş. 2-7, Eş. 10 ve Eş. 19'dan yararlanılarak Eş. 21 şeklinde verilebilir:

$$M = -EI \bar{\varphi}_{,x} . \quad (21)$$

Ele alınan problemin sayısal çözümünde kullanılmak üzere, boyutsuz büyüklükler Eş. 22 ile sunulmaktadır:

$$\begin{aligned} x^* &= x/L, \quad \bar{w}^* = \bar{w}/r, \quad \delta^* = \delta/r, \quad R^* = R/r, \\ r^2 &= I/A, \quad \lambda = L/r, \\ w_0^* &= w_0/r = (\delta^* - R^*) + \sqrt{R^{*2} - \lambda^2 (x^* - 0,5)^2}, \\ \varphi_0^* &= \frac{dw_0^*}{dx^*} = \frac{-(\lambda^*)^2 \left(x^* - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^{*2} - (\lambda^*)^2 \left(x^* - \frac{1}{2}\right)^2}} \quad (0 \leq x^* \leq 1), \\ \varphi^* &= \frac{L}{r} \varphi, \quad q^* = \frac{qL^4}{EI r}, \quad H^* = \frac{HL^2}{EI}, \\ V^* &= \frac{VL^3}{EI r}, \quad M^* = \frac{ML^2}{EI r}. \end{aligned} \quad (22)$$

Burada; I atalet momentini, A ilkel kusurlu kirişin en kesit alanını, r atalet yarıçapını göstermektedir. Boyutsuz büyüklüklerin kullanılması ile Eş. 7, Eş. 17-Eş. 18, Eş. 20-Eş. 21 ifadeleri, Eş. 23-Eş. 27 şeklinde sunulabilmektedir:

$$\bar{\varphi}^* = \frac{d\bar{w}^*}{dx^*}, \quad (23)$$

$$q^* = \frac{dV^*}{dx^*}, \quad (24)$$

$$\frac{dM^*}{dx^*} = V^* + H^* (\bar{\varphi}^* + \varphi_0^*), \quad (25)$$

$$M^* = -\frac{d\bar{\varphi}^*}{dx^*}, \quad (26)$$

$$H^* = \int_0^{1/2} (\varphi_0^{*2} - \varphi^{*2}) dx^* . \quad (27)$$

Eş. 15 ile verilen sınır koşulları, Eş. 16'yı da göz önüne alarak boyutsuzlaştırılmış olarak Eş. 28 ile verilmektedir:

$$\bar{w}^* \Big|_{x^*=0} = 0, \quad \bar{\varphi}^* \Big|_{x^*=0} = 0, \quad \bar{\varphi}^* \Big|_{x^*=1/2} = 0, \quad V^* \Big|_{x^*=1/2} = 0 . \quad (28)$$

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ (SOLUTION METHOD)

Eş. 23-Eş. 26 ile verilen sıradan, doğrusal olmayan diferansiyel denklem takımı; ileri sonlu farklar yöntemi kullanılarak doğrusal olmayan cebirsel denklemlere dönüştürülmüştür. İlkel kusurlu yarım kirişin çözüm bölgesi üzerinde, aralarında sabit Δx^* mesafesi olan n adet düğüm noktası alınarak, her bir i . düğüm noktasında bulunan $\bar{w}_i^*, \bar{\varphi}_i^*, V_i^*, M_i^*$ bilinmeyen büyüklükleri ve bilinmeyen yatay mesnet tepkisi H^* ile beraber, toplamda $(4n-1)$ adet bilinmeyen büyüklüğün sayısal analizi yapılmaktadır. İleri sonlu farklar yöntemi kullanılarak, n . düğüm noktası hariç, diğer düğüm noktaları için elde edilen cebirsel denklemler Eş. 29-Eş. 32 ile sunulmaktadır:

$$f_{1i} = \Delta x^* \bar{\varphi}_i^* - (\bar{w}_{i+1}^* - \bar{w}_i^*) = 0, \quad (29)$$

$$f_{2i} = \Delta x^* q^* - (V_{i+1}^* - V_i^*) = 0, \quad (30)$$

$$f_{3i} = \Delta x^* H^* (\bar{\varphi}_i^* + \varphi_0^*) + \Delta x^* V_i^* - (M_{i+1}^* - M_i^*) = 0, \quad (31)$$

$$f_{4i} = \Delta x^* M_i^* + (\bar{\varphi}_{i+1}^* - \bar{\varphi}_i^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, (n-1). \quad (32)$$

Trapez kuralı kullanılarak [26] Eş. 27, Eş. 33'de verildiği gibi düzenlenebilmektedir:

$$\begin{aligned} f_{5m} &= H^* + \Delta x^* \left[0 + (\bar{\varphi}_2^{*2} + 2\bar{\varphi}_2^* \varphi_0^*) + (\bar{\varphi}_3^{*2} + 2\bar{\varphi}_3^* \varphi_0^*) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\varphi}_{(n-1)}^{*2} + 2\bar{\varphi}_{(n-1)}^* \varphi_0^*) + 0 \right] = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Eş. 29-Eş. 33 ile verilen doğrusal olmayan boyutsuz cebirsel denklemler ve Eş. 28 ile verilen boyutsuz sınır koşulları toplu halde, yer değiştirme kontrollü Newton-Raphson yöntemi kullanılarak çözülebilmektedir. Tekin Atacan ve Yükseler [19]'da tekil kuvvet etkisindeki, Tekin Atacan ve Yükseler [20]'de sinusoidal yükleme altındaki sinusoidal ilkel kusura sahip mafsalı kirişlerin; Tekin Atacan ve Yükseler [27]'de yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak sinusoidal yükleme altındaki eğri eksenli nano kirişlerin; Erdölen ve Yükseler [28]'de düzgün yayılı iç basınç kuvveti etkisindeki sonlu şekil değiştirme ve sonlu dönme yapabilen küresel kabukların; Yıldırım ve Yükseler [29]'da tekil yük etkisinde sıkışabilen bir malzeme olan poliüretandan yapılmış olan, sonlu şekil değiştirme ve sonlu dönme yapabilen küresel kabukların vurgu stabilitesi probleminin ve Altekin ve Yükseler [30]'da büyük yer değiştirme

yapabilen tam ve kısmi yüklü sığ küresel kabukların eğilme probleminin çözümünde de bu yaklaşım kullanılmıştır. Ele alınan çalışmada, ilgili bilgisayar programı yazarlar tarafından oluşturulmuştur.

4. SAYISAL SONUÇLAR (NUMERICAL RESULTS)

Düzgün yayılı yüklemeye etkisindeki iki ucu ankastre mesnetli çembersel ilkel kusura sahip kirişin vurgu stabilitesi probleminin çözümü, yüklemeye ve mesnetlenme tipinin simetrik olmasından faydalanılarak yarım bölge için araştırılmıştır. Sayısal sonuçların elde edilmesinde kullanılacak olan düğüm noktası sayısının belirlenmesi için yapılan yakınsama analizi sonuçları Tablo 1’de verilmektedir. Tablo 1’den görüldüğü üzere, düğüm noktası sayısı arttırıldıkça, burkulma yükünün değeri azalmaktadır.

Tablo 1. Düğüm noktası sayısının burkulma yükü üzerindeki etkisi, $b=1m$, $t=0,3m$, $L=34m$, $\theta=3,2485^\circ$, $E=200*10^6$ kN/m²

(The effect of the number of nodes on the buckling load for $b=1m$, $t=0,3m$, $L=34m$, $\theta=3,2485^\circ$, $E=200*10^6$ kN/m²)

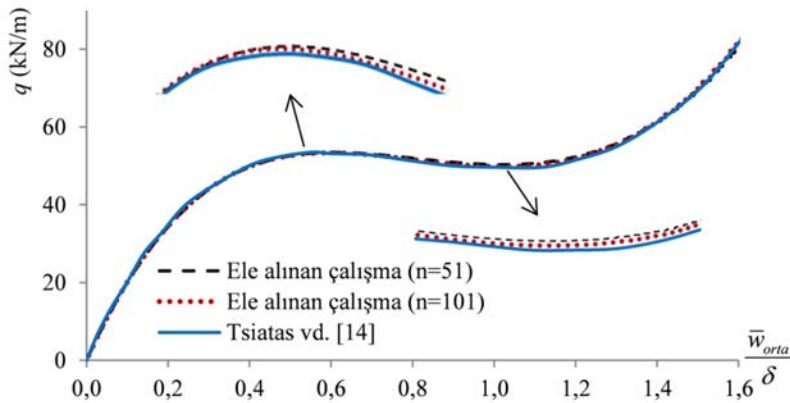
n	q_{kr} (kN/m)	% fark
31	53.657763	
51	53.454852	-0.003782
101	53.357708	-0.001817
151	53.335889	-0.000409
201	53.326974	-0.000167

Ele alınan çalışmada düğüm noktası sayısının $n=51$ ve $n=101$ değerleri kullanılarak elde edilen sayısal sonuçların doğruluğunun test edilmesi amacıyla, Tsiatas vd. [14] çalışmasında elde edilmiş olan bir grafik ile Şekil 3’te karşılaştırma yapılmaktadır. Tsiatas vd. [14]’de verilmiş olan grafikte $b=1m$, $t=0,3m$, $L=34m$, $\theta=3,2485^\circ$, $E=200*10^6$ kN/m² sayısal değerleri kullanılarak; iki ucu ankastre mesnetli, eksen boyunca düzgün yayılı yük etkisindeki sığ çembersel kemerin vurgu stabilitesi incelenmiştir. Şekil 3’te sunulan grafik elde edilirken, ele alınan çalışmada 51 ve 101 düğüm noktası kullanılmış olup, eğrilerin örtüşmesi ve Tablo 1’den görüldüğü üzere, kesme hatasının düşük olması

sebebiyle, ele alınan çalışmada 101 düğüm noktası kullanılmasının yeterli olduğu görülmüştür.

Bateni ve Eslami [31] çalışmasında; düzgün yayılı yük etkisindeki fonksiyonel derecelendirilmiş, sığ çembersel kemerlerin stabilite davranışları analitik yöntem ile araştırılmış olup, eğrilik yarıçapı, merkez açı ve en kesit kalınlığı değerlerini içeren geometrik bir parametre, $\eta=(R\theta^2)/t$, tanımlanmıştır. Farklı geometrik boyutlardaki sığ çembersel kemerlerin aynı η parametresine sahip olması durumunda, stabilite davranışlarının da aynı olduğu belirtilmiştir. [31]’de, düzgün yayılı yük etkisindeki ankastre mesnetli sığ çembersel kemerin malzemesinin homojen olması halinde; doğrusal olmayan eğilme ile zayıf vurgu stabilitesi arasında bir sınır değer olarak $\eta=2,84$; vurgu stabilitesi ile dallanma tipi stabilite arasında ise yaklaşık bir sınır değer olarak $\eta=5,01$ verilmektedir. Kritik yatay yük, $P_{kr}=(\psi^2 EI)/(R^2 \theta^2)$ ifadesi ile verilmiştir. Burada; eğrilik yarıçapı R , merkez açı 2θ , elastisite modülü E , atalet momenti I ile gösterilerek, ankastre mesnetli kemerler için, kritik çembersel basınç kuvveti parametresi $\psi_{ankastre}=4,49341$ olarak verilmiştir. İlgili çalışmada sunulan denge yolu ve yatay mesnet tepkisinin (H) dış yük ile değişiminin grafikleri ile karşılaştırma yapmak amacıyla, ele alınan çalışmada $\eta=5,01$ değerini sağlayan, $R=300m$, $\theta=4,0554727608^\circ$, $t=0,3m$ değerleri kullanılmıştır. Şekil 4 ile verilen karşılaştırma, sayısal sonuçların uyumlu olduğunu göstermektedir.

Şekil 5’te; boyutsuz geometrik parametre η ’nın, boyutsuz yük-orta noktadaki düşey yer değiştirme grafiği üzerindeki etkileri verilmektedir. Boyutsuz geometrik parametre η ’nın 2.00’a eşit olması durumunda; boyutsuz düşey yer değiştirme boyutsuz dış yük ile birlikte sürekli olarak artmakta, diğer bir deyişle, burkulma oluşmamaktadır. $\eta=2,84$ durumunda; boyutsuz dış yük - düşey yer değiştirme grafiği yatay bir teğete sahip olup, vurgu stabilitesine geçiş için sınır durumu ifade etmektedir. İki limit noktaya sahip olan vurgu stabilitesi davranışı, $\eta=4,00$ değerinde verilmektedir. Birinci limit nokta, boyutsuz burkulma yükünü ve boyutsuz burkulma yer değiştirmesini işaret



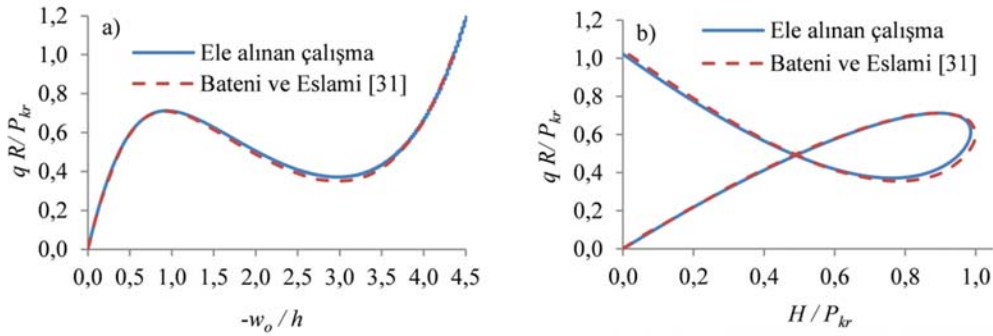
Şekil 3. Yük-orta noktadaki düşey yer değiştirme eğrilerinin karşılaştırılması
(Comparison of the load-midpoint vertical displacement curves)

etmektedir. η parametresi değeri artırılmasıyla, boyutsuz burkulma yükü değeri artmakta ve vurgu stabilitesi davranışı daha belirgin olarak görülmektedir. Şekil 6'da; boyutsuz yatay mesnet tepkisinin, dış yük ve orta noktadaki düşey yer değiştirme ile ilişkilerine, boyutsuz geometrik parametrenin etkisi incelenmektedir. Yük - düşey yer değiştirme eğrilerinin limit noktalara sahip olduğu vurgu stabilitesi durumunda, H^*-q^* grafiklerinde de limit noktaların bulunduğu Şekil 6a'da görülmektedir. η parametresi değeri artırılmasıyla boyutsuz yatay mesnet tepkisinin en büyük değerinin de arttığı (Şekil 6a, Şekil 6b) ancak en büyük yatay mesnet tepkisi meydana geldiğinde ölçülen boyutsuz orta nokta düşey yer değiştirme değerinin azaldığı (Şekil 6b) izlenmektedir. Geometrik parametre değerinden bağımsız olarak, orta noktadaki düşey yer değiştirme ilkel

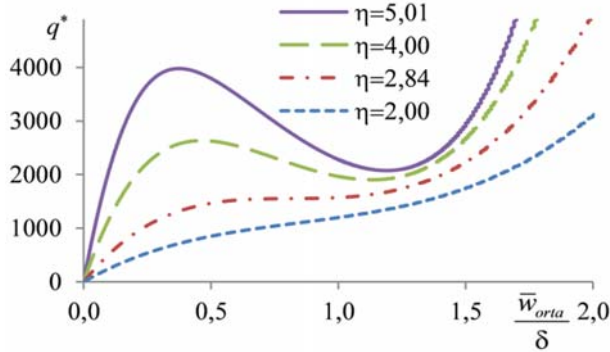
kusurun genliğinin 1.75 katı olduğunda, yatay mesnet tepkisi sıfır değerini almaktadır (Şekil 6b).

Boyutsuz düşey mesnet tepkisi V_m 'nin dış yük ve orta noktadaki düşey yer değiştirme ile ilişkilerine, boyutsuz geometrik parametrenin etkisi Şekil 7'de araştırılmaktadır. Düzgün yayılı düşey yük etkisindeki ankastre mesnetli ilkel kusurlu kirişte, düşey dış yük mesnetler tarafından eşit olarak karşılanmaktadır (Şekil 7a). Burkulmanın oluştuğu, η 'nın 2,84'den daha büyük değerlerine karşılık gelen boyutsuz düşey mesnet tepkisi-orta noktadaki boyutsuz yer değiştirme eğrilerinde ekstrem noktalar (Şekil 7b) oluşmaktadır.

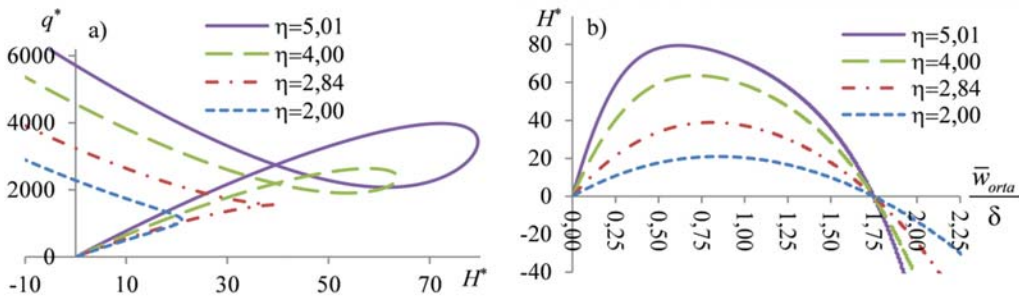
Ankastre mesnette meydana gelen mesnet momenti; dış yük ve orta noktadaki düşey yer değiştirme ile ilişkisi, çeşitli η



Şekil 4. Denge yolu ve yatay mesnet tepkisinin dış yük ile değişimi, $\eta=5,01$
(Variations of the equilibrium path and the horizontal support reaction with the external load, $\eta=5.01$)



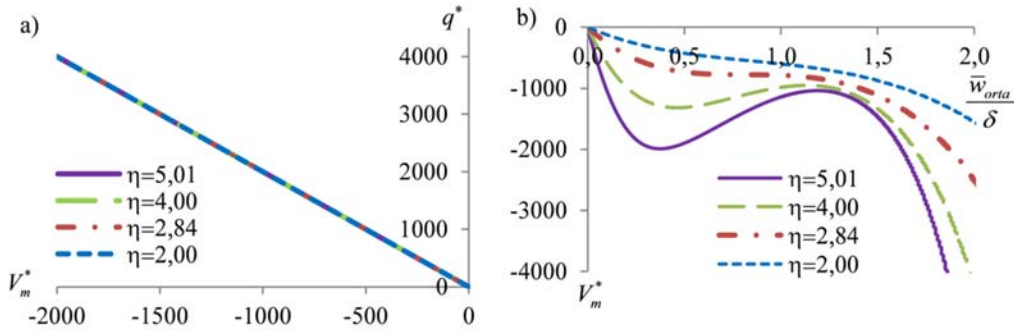
Şekil 5. Boyutsuz geometrik parametrenin denge yolları üzerindeki etkisi
(Effect of the dimensionless geometrical parameter on the equilibrium paths)



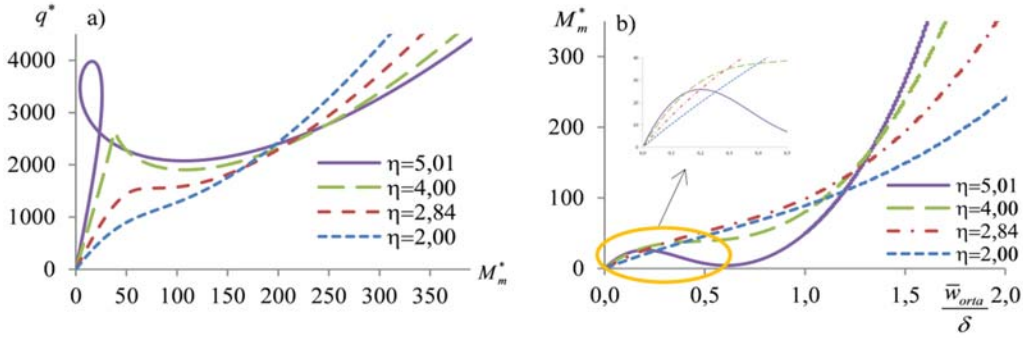
Şekil 6. Boyutsuz geometrik parametrenin boyutsuz yatay mesnet tepkisi üzerindeki etkisi
(Effect of the dimensionless geometrical parameter on the dimensionless horizontal support reaction)

parametreleri için Şekil 8'de verilmektedir. Burkulmanın oluşmadığı $\eta=2,84$ ve η 'nin daha küçük değerlerinde, boyutsuz mesnet momenti-boyutsuz dış yük eğrilerinde (Şekil 8a) limit noktalar olmamasına karşın; burkulmanın oluştuğu η 'nin 2,84'den daha büyük değerlerinde limit noktalar görülmektedir. η parametresinin artmasıyla, limit noktalar civarında ilmik oluşma eğilimi vardır. Burkulmanın olmadığı, η 'nin 2,84'e eşit ve daha küçük değerlerine karşı gelen boyutsuz mesnet momenti-orta noktadaki boyutsuz yer değiştirme eğrilerinde (Şekil 8b) monoton artışlar gözlenirken; burkulmanın oluştuğu, η 'nin 2,84'den daha büyük değerlerine karşı gelen boyutsuz moment mesnet tepkisi-orta noktadaki boyutsuz yer değiştirme eğrilerinde ekstrem noktalar oluşmaktadır.

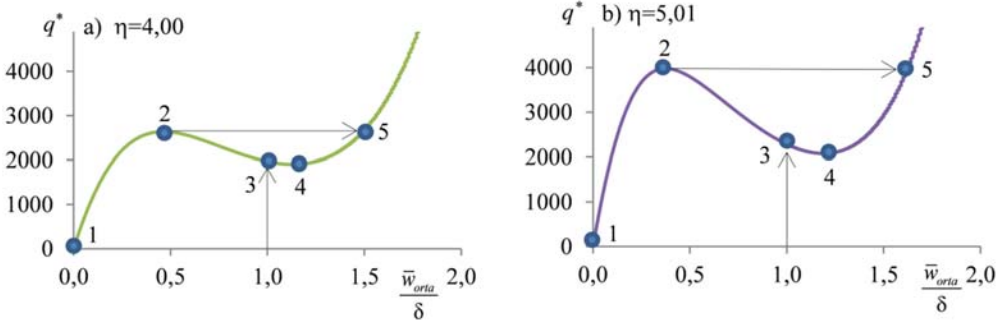
Şekil 9'da; $\eta=4,00$ ve $\eta=5,01$ değerleri için, ilkel kusurlu kirişin şekil değiştirmiş geometrisi, eğilme momenti, kesme kuvveti diyagramları ve dönme açısı grafiklerinin inceleneceği yükleme aşamaları gösterilmektedir. 1 noktası ile verilen aşama, yüklemeye önceki durumu ifade etmektedir. 2 noktası ile verilen aşama, yük - düşey yer değiştirme grafiğindeki birinci limit noktası olup; boyutsuz burkulma yükü ve boyutsuz burkulma yer değiştirme değerlerini vermektedir. Başlangıçtan 2 noktasına kadar olan bölge kararlı bölge iken, 2 ile 4 noktaları arasındaki bölge kararsız bölgeyi belirtmektedir [22]. 3 noktası ile gösterilen aşama, orta noktadaki düşey yer değiştirmenin ilkel kusurun genliğine eşit olduğu durumu ifade etmektedir ve bu aşamada, orta noktanın düşey koordinatı sıfır olmaktadır. 4 noktası ile belirtilen aşama, yük - düşey yer değiştirme



Şekil 7. Boyutsuz geometrik parametrenin boyutsuz düşey mesnet tepkisi üzerindeki etkisi (Effect of the dimensionless geometrical parameter on the dimensionless vertical support reaction)



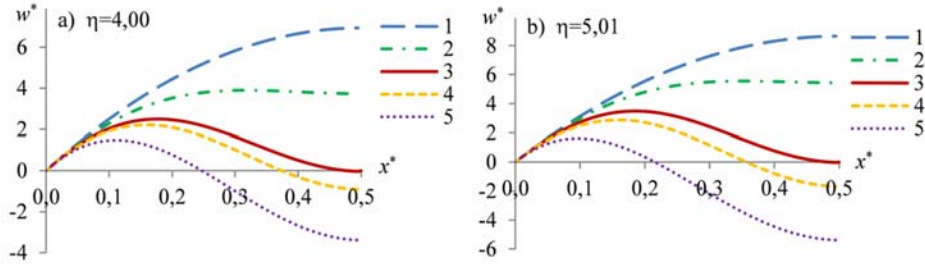
Şekil 8. Boyutsuz geometrik parametrenin boyutsuz mesnet momenti üzerindeki etkisi (Effect of the dimensionless geometrical parameter on the dimensionless support moment)



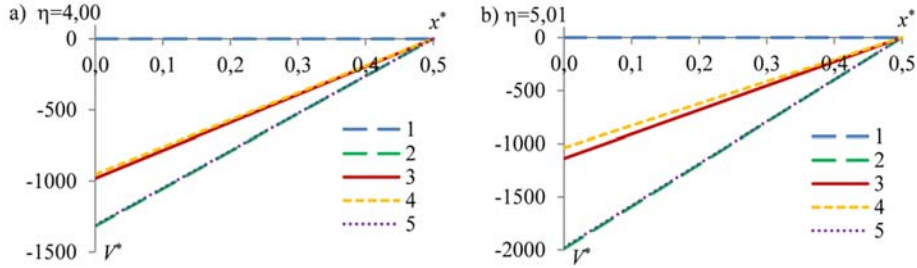
Şekil 9. Denge yollarında izlenecek aşamalar a) $\eta=4,00$, b) $\eta=5,01$ (Stages to be followed in the equilibrium paths for a) $\eta=4,00$, b) $\eta=5,01$)

grafiğindeki ikinci limit noktası olup, bundan sonra kararlı bölgeye geçiş mümkün olmaktadır. 5 noktasında burkulma yüküne eşit bir dış yük etkimesine rağmen, burkulma yer değiştirmesinden çok farklı bir yer değiştirmeye sahip olduğu dikkat edilebilir.

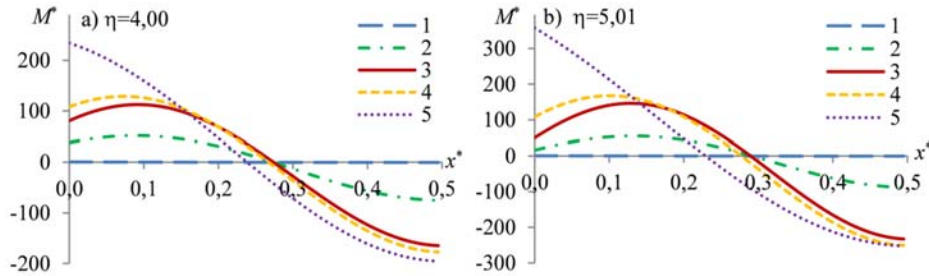
Şekil 10'da; yüklemenin belirtilen aşamalarında ilkel kusurlu kirişin şekil değiştirmiş geometrileri, yükleme ve mesnetlenme tipinin simetrik olmasını göz önüne alarak yarım bölge için sunulmaktadır. 1 numara ile ilkel kusurlu kirişin şekil değiştirmeden önceki geometrisi verilmektedir. Burkulma yükü etkisi altındaki ilkel kusurlu kiriş geometrisi 2 numara ile, orta noktadaki düşey yer değiştirmenin ilkel kusurun genliğine eşit olması durumundaki kiriş geometrisi 3 numara ile belirtilmektedir. İkinci limit noktasına karşı gelen yükleme etkisindeki kiriş geometrisi 4 numara ile; ikinci kararlı bölgede bulunan, burkulma yüküne eşit bir yükleme altındaki kiriş geometrisi 5 numara ile verilmektedir.



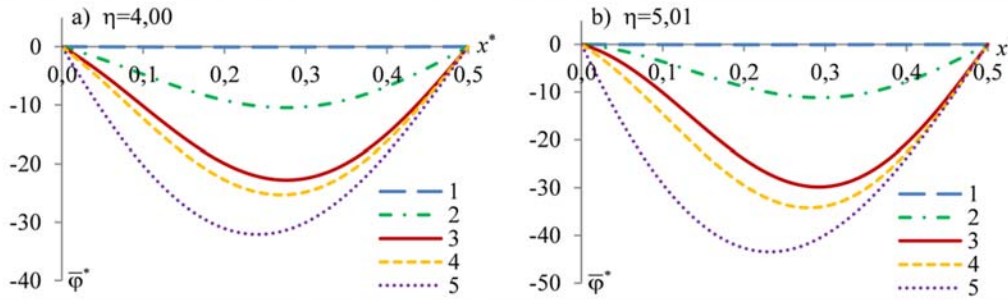
Şekil 10. Yüklemenin çeşitli aşamalarında ilkel kusurlu yarım kirişin şekil değiştirmiş geometrileri a) $\eta=4,00$, b) $\eta=5,01$ (Deformed geometries of the half of the initially imperfect beam corresponding to the various stages of the loading for a) $\eta=4.00$, b) $\eta=5.01$)



Şekil 11. Yüklemenin çeşitli aşamalarında ilkel kusurlu yarım kirişte boyutsuz efektif kesme kuvveti diyagramları a) $\eta=4,00$, b) $\eta=5,01$ (Dimensionless effective shear force diagrams of the half of the initially imperfect beam corresponding to the various stages of the loading for a) $\eta=4.00$, b) $\eta=5.01$)



Şekil 12. Yüklemenin çeşitli aşamalarında ilkel kusurlu yarım kirişte boyutsuz eğilme momenti diyagramları a) $\eta=4,00$, b) $\eta=5,01$ (Dimensionless bending moment diagrams of the half of the initially imperfect beam corresponding to the various stages of the loading for a) $\eta=4.00$, b) $\eta=5.01$)



Şekil 13. Yüklemenin çeşitli aşamalarında ilkel kusurlu yarım kirişte dönme açılarının değişimleri a) $\eta=4,00$, b) $\eta=5,01$
(Variations of the rotation angle of the half of the initially imperfect beam corresponding to the various stages of the loading for a) $\eta=4.00$, b) $\eta=5.01$)

arttırıldıkça, boyutsuz eğilme momenti değerleri artmaktadır. Dönme açısı diyagramları $\eta=4,00$ ve $\eta=5,01$ değerleri kullanılarak açıklık boyunca Şekil 13'te verilmektedir. Beklendiği gibi, ilkel kusurlu kirişin orta noktasındaki dönme açısı değerleri sıfır olmaktadır. Dönme açısının mutlak değerce şiddeti, boyutsuz geometrik parametre değeri arttırıldıkça artmaktadır.

5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada; küçük bir çembersel ilkel kusura sahip, ankastre mesnetli narin kirişlerin açıklık boyunca düzgün yayılı düşey yük etkisi altında vurgu stabilitesi davranışları, sonlu farklar ve yer değiştirme kontrollü Newton-Raphson yöntemleri kullanılarak sayısal olarak araştırılmıştır. Çembersel ilkel kusurlu kiriş için tanımlanmış olan boyutsuz geometrik bir parametrenin [31] değişiminin; boyutsuz burkulma yüküne, boyutsuz burkulma yer değiştirmesine, boyutsuz mesnet tepkilerine, yüklemenin çeşitli aşamalarında iç kuvvetlere ve şekil değiştirmiş kirişin geometrisine etkisi, çizilen grafikler yardımıyla incelenmiştir. Çalışmadan elde edilen sonuçlar ve değerlendirmeler boyutsuz büyüklükler üzerinden yapılarak, aşağıda sunulmaktadır:

- Geometrik parametrenin arttırılmasının (dolayısıyla; ilkel kusurun genliğinin atalet yarıçapına oranının, eğrilik yarıçapının, merkez açısının, ilkel kusurun genliğinin açıklığa oranı ve/veya narinlik oranı değerlerinin arttırılmasının ve/veya en kesit kalınlığının azaltılmasının), burkulma yükünün artmasına, ancak burkulma yer değiştirmesi değerlerinin azalmasına (Şekil 5) yol açtığı görülmektedir.
- Geometrik parametrenin arttırılması; yatay mesnet tepkisinin en büyük değerinin de artmasına (Şekil 6), bununla beraber yatay mesnet tepkisinin en büyük değerine karşı gelen yer değiştirme değerinin azalmasına (Şekil 6b) yol açmaktadır.
- Yatay mesnet tepkisinin sıfır değerini almasında geometrik parametrenin etkisinin olmadığı görülmektedir (Şekil 6b).
- Düşey mesnet tepkisinin geometrik parametre ile değişimi, dış yük değerine bağlı olarak değişmektedir. Düşey dış yük mesnetler tarafından eşit olarak karşılanmaktadır (Şekil 7).
- Burkulmanın oluşmadığı geometrik parametre değerleri için mesnet momenti, dış yük ve orta nokta yer

değiştirmesi ile birlikte monoton bir artış göstermektedir. Ancak, burkulmanın meydana geldiği geometrik parametre değerlerinde, mesnet momentinin dış yük ile değişiminde limit noktalar, orta nokta yer değiştirmesi ile ilişkisinde dalgalanmalar görülmektedir (Şekil 8).

- Geometrik parametre değerlerinin arttırılması; efektif kesme kuvveti (Şekil 11), eğilme momenti (Şekil 12) ve dönme açısının (Şekil 13) mutlak değerce artmasına yol açmaktadır.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Daş T.M., Yılmaz A., Vibration analysis of a cracked circular curved beams, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 33 (3), 783-792, 2018.
2. Medina L., Gilat R., Ilic B., Krylov S., Experimental investigation of the snap-through buckling of electrostatically actuated initially curved pre-stressed micro beams, Sens. Actuators, A, 220, 323-332, 2014.
3. Anıl Ö., Belgin M.Ç., Nonlinear finite element analysis of rectangular cross sectional beam under monotonic loading, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 22 (1), 191-197, 2007.
4. Kalkan İ., In-plane flexural behavior of reinforced concrete beams with regular openings, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 29 (1), 155-163, 2014.
5. Gjelsvik A., Bodner S.R., The energy criterion and snap buckling of arches, Journal of the Engineering Mechanics Division, 88 (5), 87-134, 1962.
6. Cai J.G., Feng J., Effect of support stiffness on stability of shallow arches, Int. J. Struct. Stab. Dyn., 10 (5), 1199-1110, 2010.
7. Bradford M.A., Uy B., Pi Y.-L., In-plane elastic stability of arches under a central concentrated load, J. Eng. Mech., 128 (7), 710-719, 2002.
8. Zhang Z., Liu A.R., Yang J., Huang Y., Nonlinear inplane elastic buckling of a laminated circular shallow arch subjected to a central concentrated load, Int. J. Mech. Sci., 161-162, article 105023, 2019.
9. Cai J.G., Feng J., Chen Y., Huang L.F., In-plane elastic stability of fixed parabolic shallow arches, Sci. China Ser. E: Technol. Sci., 52 (3), 596-602, 2009.
10. Hu C.-F., Pi Y.-L., Gao W., Li L., In-plane non-linear elastic stability of parabolic arches with different rise-to-span ratios, Thin-Walled Struct., 129, 74-84, 2018.

11. Bradford M.A., Wang T., Pi Y.-L., Gilbert R.I., In-plane stability of parabolic arches with horizontal spring supports. I: Theory, *J. Struct. Eng.*, 133 (8), 1130-1137, 2007.
12. Pi Y.-L., Bradford M.A., Uy B., In-plane stability of arches, *Int. J. Solids Struct.*, 39 (1), 105-125, 2002.
13. Pi, Y.-L., Bradford M.A., Tin-Loi F., Nonlinear analysis and buckling of elastically supported circular shallow arches, *Int. J. Solids Struct.*, 44 (7-8), 2401-2425, 2007.
14. Tsiatas G.C., Tsiptsis I.N., Siokas A.G., Nonlinear buckling and post-buckling of shape memory alloy shallow arches, *J. Appl. Comput. Mech.*, 6 (3), 665-683, 2020.
15. Moon J., Yoon K.-Y., Lee T.-H., Lee H.-E., In-plane elastic buckling of pin-ended shallow parabolic arches, *Eng. Struct.*, 29, 2611-2617, 2007.
16. Rubin M.B., Buckling of elastic shallow arches using the theory of a Cosserat point, *J. Eng. Mech.*, 130, 216-224, 2004.
17. Luu A.-T., Lee J., Non-linear buckling of elliptical curved beams, *Int. J. Non Linear Mech.*, 82, 132-143, 2016.
18. Tsiatas G.C., Babouskos N.G., Linear and geometrically nonlinear analysis of non-uniform shallow arches under a central concentrated force, *Int. J. Non Linear Mech.*, 92, 92-101, 2017.
19. Tekin Atacan A., Yükseler R.F., Snap-through buckling of hinged-hinged initially imperfect beams undergoing finite deflections subjected to lateral concentrated midpoint loads, *Mech. Solids+*, 54 (7), 1119-1130, 2019.
20. Tekin Atacan A., Yükseler R.F., Nonlinear behavior of beams having initially small imperfection subjected to sinusoidal load, *Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 9 (1), 466-477, 2020.
21. Simitzes G.J., Hodges D.H., *Fundamentals of Structural Stability*, Elsevier, Burlington, MA, 2006.
22. İnan M., *Cisimlerin Mukavemeti*, İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı Yayınları, İstanbul, 2001.
23. Hildebrand F.B., *Methods of Applied Mathematics*, second ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
24. Yükseler R.F., A theory for rubber-like rods, *Int. J. Solids Struct.*, 69-70, 350-359, 2015.
25. Arefi, A., Nahvi H., Stability analysis of an embedded single-walled carbon nanotube with small initial curvature based on nonlocal theory, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 24 (11), 962-70, 2017.
26. Maron M.J., Lopez R.J., *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Wadsworth Publishing Company, Belmont, 1991.
27. Tekin Atacan A., Yükseler R.F., Snap-through instability of slightly curved beams under sinusoidal loading based on nonlocal elasticity theory, *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, doi: 10.1080/15397734.2021.1901736, 2021.
28. Erdölen A., Yükseler R.F., An approach for finite strains and rotations of shells of revolution with application to a spherical shell under a uniformly distributed pressure, *J. Elastomers Plast.*, 35 (4), 357-365, 2003.
29. Yıldırım B., Yükseler R.F., Effect of compressibility on nonlinear buckling of simply supported polyurethane spherical shells subjected to an apical load, *J. Elastomers Plast.*, 43 (2), 167-187, 2011.
30. Altekin M., Yükseler R.F., Axisymmetric large deflection analysis of fully and partially loaded shallow spherical shells, *Struct. Eng. Mech.*, 47 (4), 559-573, 2013.
31. Bateni M., Eslami M.R., Non-linear in-plane stability analysis of FG circular shallow arches under uniform radial pressure, *Thin-Walled Struct.*, 94, 302-313, 2015.