

## HOMOJEN OLMAYAN ÇUBUĞUN ZORLANMIŞ TİTREŞİM ANALİZİ İÇİN KAPALI-FORM ÇÖZÜMLERİ

**Kerimcan ÇELEBİ<sup>a</sup>, İbrahim KELEŞ<sup>b</sup>, Naki TÜTÜNCÜ<sup>c</sup>**

<sup>a</sup>Makine Müh. Böl., Müh. Fak., Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, 80000/Osmaniye

<sup>b</sup>Makine Müh. Böl., Müh. Fak., Ondokuz Mayıs Üniversitesi, 55139/Samsun

<sup>c</sup>Makine Müh. Böl., Müh.-Mim. Fak., Çukurova Üniversitesi, 01330/Adana

[kcancelebi@osmaniye.edu.tr](mailto:kcancelebi@osmaniye.edu.tr), [ibrahimkeles@omu.edu.tr](mailto:ibrahimkeles@omu.edu.tr), [ntutuncu@cu.edu.tr](mailto:ntutuncu@cu.edu.tr)

(Geliş/Received: 14.06. 2011 ; Kabul/Accepted: 01.08.2012)

### ÖZET

Sürekli sistem olarak modellenen eksenel yüklenmiş homojen olmayan bir çubuğun elastik davranış problemi analiz edilmiştir. Çözümler Laplace uzayında elde edilmiş ve gerçek zaman uzayına ters dönüşüm Rezidü teoremi kullanılarak yapılmıştır. Bu metodun etkinliği, bulunan sonuçların Mod Süperpozisyon metodu ile karşılaştırılması sonucu gösterilmiştir. Sonuçlar, her bir yükleme tipi için oluşturulan grafiklerle sunulmuştur. Homojen olmayan modellerde kullanılan inhomojenlik parametresinin dinamik davranışı belirleyici olduğu tespit edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Zorlanmış titreşim; Doğal frekans; Homojen olmayan çubuk; Laplace dönüşümü; Rezidü teoremi.

## CLOSED-FORM SOLUTIONS FOR FORCED VIBRATION ANALYSIS OF INHOMOGENOUS ROD

### ABSTRACT

The axial vibration problem formulation and solution of a inhomogeneous rod modeled as a continuous system were analyzed. The solutions are obtained in the Laplace space and the inverse transformation into the real time domain is performed using Residue theorem. Their efficiency is demonstrated by comparing the results with those obtained using Mode Superposition Method. The results are presented in the form of graphs for load type. The inhomogeneity parameter used in inhomogeneous models is found to be effective in the response of the rod.

**Keywords:** Forced vibration; Natural frequency; Inhomogeneous rod; Laplace transformation; Residue Theorem.

### 1.GİRİŞ (INTRODUCTION)

Malzeme mühendisliği alanındaki gelişmeler, homojen olmayan malzemelerden yapı elemanları imalatını mümkün kılmıştır. Mekanik, uzay, otomotiv ve diğer mühendislik dallarında kullanılacak ileri yapı elemanları üretimi için homojen olmayan malzeme kullanımı sürekli bir artış göstermektedir. Homojen olmayan yapıya sahip çubukların dinamik yük altındaki davranışlarının analizi, kompozit malzeme

araştırmalarında önemli bir yer tutmaktadır. Tasarımcı tarafından homojen olmayan yapıya sahip elemanların kullanılması ağırlığın azaltılmasında yardımcı olduğu gibi yapıların dayanımını ve kararlılığını da arttırmaktadır. Zorlanmış titreşim analizleri çok yaygın olarak Mod Süperpozisyon metodu ile yapılmıştır. Bilindiği üzere, bu metotta, önce serbest titreşim analizi yapılır, doğal frekanslar ve mod şekilleri tespit edilir ve Duhamel İntegrali ile zorlanmış titreşim davranışı elde edilir. Doğal

frekansları da genel olarak nümerik metotlarla bulmak mümkün olur. Bu analizde istenen hassasiyete ulaşmak için çok sayıda frekans kullanılması gerekebilir. Çubukların serbest titreşim analizi ile ilgili son çalışmalar Kumar ve Sujith [1], Eisenberg [2], Abrate [3], Li [4], Li [5], Qiusheng [6], Raj ve Sujith [7], Nachum ve Altus [8], Horgan ve Chan [9] tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmalar ağırlıklı olarak sonlu elemanlar yöntemi ve benzeri nümerik yöntemleri içermektedir.

Bu çalışmada, homojen olmayan yapıya sahip bir çubuğun uç noktasına dinamik yükler uygulanarak analiz yapılmıştır ve sonuçlar kapalı formda elde edilmiştir. Analizde Laplace transformasyonu yöntemi kullanılmıştır. Elde edilen çözümlerden zaman uzayındaki çözüme geçmek için Rezydü teoremi kullanılmıştır. Aynı metot değişken kesite sahip çubukların analizi içinde uygulanmıştır. Yazarlar çalışmalarında alan değişkenliğini ele alarak problem çözümünü yapmışlardır [10]. Bu çalışmada ise yoğunluk ve elastisite modülünün değişkenliği göz önüne alınarak çözüm sağlanacaktır. Çözümlerin kapalı formda olması çözüm zamanını büyük oranda kısaltmaktadır. Serbest titreşim analizi esnasında olayı ifade eden denklem içerisindeki kompleks Laplace parametresinin " $i\alpha$ " ile değiştirilmesi sonucu doğrudan doğal frekans değerleri elde edilmiştir [11]. Çubuk geometrisinin ve rijiditesinin üniform dağıldığı varsayılmıştır. Çubuğun yoğunluğunun ve elastisitesinin boyutsuz eksenel koordinat olan  $\eta$ 'ye göre değiştiği varsayılırsa analizde kullanılacak çubuk yoğunluğunu ve elastisite modülünü ifade eden denklemler  $\sin^2[a\eta + b]$ ,  $(1 + a\eta)^2$  ve  $e^{-a\eta}$  olarak seçilir. Bu denklemlerde yer alan  $a$  ifadesi inhomojenlik parametresi olarak kabul edilmektedir. Bu ifadeler için bulunan doğal frekanslar tablo halinde verilmiş olup homojen durum olan  $a = 0$  hali için literatürde yer alan Kumar ve Sujith [1], Abrate [3] ve Li [4] ile iyi bir uyum sağladığı gözlemlenmiştir. Bulunan ilk on doğal frekans değeri tablo halinde verilmiştir. Zorlanmış titreşim analizinde ilk on doğal frekans değerinin kullanılması analiz sonuçlarında virgülden sonra altı haneli hassasiyet sağlamıştır. Bulunan sonuçlar Mod Süperpozisyon metodu (MSM) ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında, bazı durumlarda MSM'nin aynı hassasiyeti yakalaması için yüz ve üzeri doğal frekans değerine ihtiyaç duyduğu gözlemlenmiştir.

## 2. TEORİ (THEORY)

Eksenel yük altında koordinatına göre yoğunluğu  $\rho(x)$  ve elastisite modülü  $E(x)$  değişen sabit kesit alanına sahip bir çubuğun davranışı aşağıdaki diferansiyel denklem ile verilir [12]

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{E(x)} \frac{\partial E(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\rho(x)}{E(x)} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

Denklem (1)'i boyutsuz olarak ifade etmek istersek

$$\frac{\partial^2 v(\eta,\tau)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{E(\eta)} \frac{\partial E(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial v(\eta,\tau)}{\partial \eta} = c^2 \frac{\rho(\eta)}{E(\eta)} \frac{\partial^2 v(\eta,\tau)}{\partial \tau^2} \quad (2)$$

şeklinde olur. Burada  $c^2 = E/\rho$  olup, "c" deplasman yayılma hızıdır. Bu işlem için aşağıdaki boyutsuz değişkenler kullanılmıştır.

$$v(\eta,\tau) = \frac{u(x,t)}{L}, \quad \eta = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L} \quad (3)$$

Denklem (2), yoğunluk  $\rho$  ve elastisite modülü  $E$ 'nin formuna bağlı olarak, değişken katsayılı bir denklem olduğundan genel çözümü yoktur. Özel bazı  $\rho(\eta)$  ve  $E(\eta)$  formları için çözülebilir, bu formlar  $\sin^2[a\eta + b]$ ,  $(1 + a\eta)^2$  ve  $e^{-a\eta}$  olarak tespit edilmiştir. Çubuğun serbest ucuna uygulanacak kuvvetler ise  $P_1(\tau) = P_0(1 - \cos[\gamma\tau])$ ,  $P_2(\tau) = P_0$  ve  $P_3(\tau) = P_0(1 - e^{-\gamma\tau})$  olarak düşünülmüştür.

### 2.1. $E(\eta) = E_0(1 + a\eta)^2$ ve $\rho(\eta) = \rho_0(1 + a\eta)^2$

#### İfadeleri için Çözüm

(Solution for  $E(\eta) = E_0(1 + a\eta)^2$  and  $\rho(\eta) = \rho_0(1 + a\eta)^2$ )

$P_1(\tau) = P_0(1 - \cos[\gamma\tau])$  yükleme tipi için detaylı analiz sonuçları aşağıda verilmiştir, diğer söz konusu durumlar için analiz sonuçları ileriki bölümlerde tablo halinde verilecektir. Sabit-serbest uçlara sahip elastisite modülü ve yoğunluğu polinom forma bağlı olarak değişen çubuk için eksenel yüklemenin  $\eta = 1,0$ 'deki serbest uca yapıldığı kabul edilmiştir. Diferansiyel denklem (2)'yi sağlayan sınır şartları

$$v(\eta,0) = 0, \quad \frac{\partial v(\eta,0)}{\partial \tau} = 0, \quad v(0,\tau) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = \frac{P(\tau)}{A_0 E(1)} \quad (4)$$

olarak verilmiştir, burada  $A_0$  üniform kesit alanıdır.

Yoğunluk ifadesini  $\rho(\eta) = \rho_0(1 + a\eta)^2$  ve elastisite ifadesini  $E(\eta) = E_0(1 + a\eta)^2$  olarak kabul edersek diferansiyel denklem ve sınır şartları Laplace uzayında

$$y''(\eta, p) + \frac{2a}{(1 + a\eta)} y'(\eta, p) - p^2 y(\eta, p) = 0 \quad (5)$$

$$y(0, p) = 0, \quad \frac{\partial y(1, p)}{\partial \eta} = \frac{1}{E(1) A_0} L\{P(\tau)\} \quad (6)$$

formunu alır. Burada  $y(\eta, p) = L\{v(\eta, \tau)\}$  ve  $p$  ise kompleks Laplace parametresini ifade eder. Bu safhada

$$y(\eta, p) = \frac{z}{(1 + a\eta)} \quad (7)$$

değişken dönüşümü yapılarak denklem (5)  $z$  cinsinden

$$z'' - p^2 z = 0 \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir. Serbest titreşim analizi sonucu doğal frekans değerlerini bulabilmemiz için ise denklem (8)'deki Laplace parametresi " $p$ ",  $i\alpha$  olarak değiştirilerek

$$z'' + \alpha^2 z = 0 \quad (9)$$

elde edilir. Buradaki  $\alpha$  doğal frekanslara karşılık gelir ve belirlenmesi için ters transformasyona gerek yoktur [11]. Bu denklemin çözümü

$$z = c_1 \sin[k\eta] + c_2 \cos[k\eta] \quad (10)$$

olup,  $k$  parametresi

$$k^2 = \alpha^2 \quad (11)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Denklem (7)'deki transformasyon hatırlanarak  $y(\eta, p)$  aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y = \frac{1}{(1 + a\eta)} (c_1 \sin[k\eta] + c_2 \cos[k\eta]) \quad (12)$$

Çubuğun uçları sabit-serbest ise sınır şartları  $y(0) = 0$  ve  $(\partial y / \partial \eta)|_{\eta=1} = 0$  şeklindedir ve bu şartların uygulanması ile

$$k = \frac{a}{(1 + a)} \tan[k] \quad (13)$$

elde edilir. Herhangi bir  $c_1$  değeri için, denklem (13)'ten bulunacak  $\alpha_n$  değerleri ile ilişkili olan serbest titreşim mod'ları

$$y_n = \frac{\sin[k_n \eta]}{(1 + a\eta)} \quad (14)$$

şeklindedir. Tablo 1,  $a=0,1,2$  için doğal frekansları vermektedir.  $a=0$  alındığında homojen durum oluşmaktadır ve sonuçlar literatürdeki [3] sonuçlar ile aynıdır.

**Tablo 1.** Elastisite modülü ve yoğunluğu polinom forma bağlı olarak değişen çubuk için doğal frekanslar. (Natural frequencies for  $E(\eta) = E_0(1 + a\eta)^2$  and  $\rho(\eta) = \rho_0(1 + a\eta)^2$ )

Mod	a=0	a=1	a=2
1	1,57079	1,165561	0,967402
2	4,71239	4,604216	4,567452
3	7,85398	7,789883	7,768373
4	10,9956	10,949943	10,934681
5	14,1372	14,101725	14,089886
6	17,2788	17,249781	17,240109
7	20,4204	20,395842	20,387664
8	23,5619	23,540708	23,533624
9	26,7035	26,684801	26,678553
10	29,8451	29,828369	29,822779

$P_1(\tau) = P_0(1 - \cos[\gamma \tau])$  veya Laplace uzayındaki hali ile  $L\{P_1(\tau)\} = P_0 \gamma^2 / (p^2 + \gamma^2)$  dinamik yüklemesi için denklem (6)'da verilen sınır şartları denklem (12)'ye uygulanırsa

$$y = \frac{P_0 \gamma^2}{A E_0 (1 + a\eta)} \frac{F(p)}{p(p^2 + \gamma^2) G(p)} \quad (15)$$

elde edilir, burada

$$F(p) = \sin[\sqrt{-p^2} \eta] \tag{16}$$

$$G(p) = \sqrt{-p^2} (1+a) \cos[\sqrt{-p^2}] - a \sin[\sqrt{-p^2}] \tag{17}$$

olarak tanımlanır ve kompleks Laplace parametresi “p” bu denklemler içinde mevcuttur. Ters dönüşüm teoremini kullanarak gerçek zaman uzayında yer değiştirme fonksiyonu olan v’yi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$v(\eta, \tau) = \frac{P_0 \gamma^2}{E A_0 (1+a \eta) 2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\xi \tau} F(\xi) d\xi}{(\xi^2 + \gamma^2) G(\xi) \xi} \tag{18}$$

Rezidü teoremi uygulanırsa:

$$v(\eta, \tau) = 2\pi i \sum v' \text{nin herbir kökü için rezidüleri} \tag{19}$$

Denklem (18)’e ait tekil noktalar:  $\xi = \pm i\gamma$ ,  $\xi = 0$  ve  $G(\xi) = 0$  yapan  $\xi$  değerleridir.

Bunlardan  $i\gamma$  ve  $-i\gamma$  kökleri için Rezidü çözümü aşağıdaki gibi kolayca elde edilebilir:

$$-\frac{e^{i\gamma \tau} F(i\gamma)}{2\gamma^2 G(i\gamma)} \quad \text{ve} \quad -\frac{e^{-i\gamma \tau} F(-i\gamma)}{2\gamma^2 G(-i\gamma)} \tag{20}$$

Denklem (20) için  $F(-i\gamma) = F(i\gamma)$  ve  $G(-i\gamma) = G(i\gamma)$  olduğundan,  $i\gamma$  ve  $-i\gamma$  köklerine ait toplam Rezidü

$$R_1 = -\frac{F(i\gamma) \text{Cos}[\gamma \tau]}{\gamma^2 G(i\gamma)} \tag{21}$$

halini alır.

$G(\xi)$  ifadesini sıfır yapan kökleri bulabilmek için denklem (17) içerisindeki  $\xi$  değerleri  $i\alpha$  ile değiştirilir, burada  $G(i\alpha) = G(-i\alpha) = 0$  olacağından denklem (17)

$$\sqrt{\alpha_s^2} (1+a) \cos[\sqrt{\alpha_s^2}] - a \sin[\sqrt{\alpha_s^2}] = 0 \tag{22}$$

halini alır. Denklem (22)’nin kökleri olan  $\alpha_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$  değerleri aynı zamanda daha önce denklem (13) kullanılarak bulunan doğal frekanslara

eşittir. Uzun tartışmalara başvurmadan, bu gözleme dayalı olarak bu köklerin hepsinin gerçek ve basit olduğu söylenebilir.

$\xi = \pm i\alpha_s$  kökleri için integrant’e rezidü uygulanırsa

$$\frac{e^{i\alpha_s \tau} F(i\alpha_s)}{(\gamma^2 - \alpha_s^2) \alpha_s \frac{dG}{d\xi} \Big|_{\xi = \alpha_s}} \quad \text{ve} \quad \frac{e^{-i\alpha_s \tau} F(-i\alpha_s)}{(\gamma^2 - \alpha_s^2) \alpha_s \frac{dG}{d\xi} \Big|_{\xi = -\alpha_s}} \tag{23}$$

elde edilir. Buradan  $\xi = \pm i\alpha_s$  için toplam Rezidü ifadesi

$$R_s = \frac{2 \cos[\alpha_s \tau] \sin[\sqrt{\alpha_s^2}]}{(\gamma^2 - \alpha_s^2) (\alpha_s) (\cos[\alpha_s] - (1+a) \alpha_s \sin[\sqrt{\alpha_s^2}])} \tag{24}$$

olarak bulunur. Bu durumda  $G(\xi)$  ifadesini sıfır yapan değerler için toplam Rezidü

$$R_2 = \sum_{s=1}^{\infty} R_s \tag{25}$$

olarak elde edilir.

$\xi = 0$  durumu için ise Rezidü ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$R_3 = \frac{\sin[0]}{\gamma^2 (-a) \sin[0]} \tag{26}$$

Denklem (26)’nın sonucu 0/0 belirsizliğini vereceğinden dolayı L’hospital kuralı uygulanarak

$$R_3 = \frac{1}{\gamma^2} \tag{27}$$

elde edilir.

$R_1$ ,  $R_2$  ve  $R_3$ ’ün bulunması ile çubuğa ait deplasman ifadesi aşağıda verilen son halini alır

$$v(1, \tau) = \frac{P_0 \gamma^2}{E A_0 (1+a)} (R_1 + R_2 + R_3) \tag{28}$$

**Tablo 2.** Elastisite modülü ve yoğunluğu polinom forma bağlı olarak değişen çubuk için  $P_1(\tau), P_2(\tau)$  ve  $P_3(\tau)$  yükleme tipleri altındaki deplasman ifadeleri. (End displacement equations due to  $P_1(\tau), P_2(\tau)$  and  $P_3(\tau)$  for  $E(\eta) = E_0(1+a\eta)^2$  and  $\rho(\eta) = \rho_0(1+a\eta)^2$ )

$P_1(\tau)$	$v(1, \tau) = \frac{P_0 \gamma^2}{E_0 A_0 (1+a)} (R_1 + R_2 + R_3)$
	$R_1 = - \frac{F(i\gamma) \cos[\gamma \tau]}{\gamma^2 G(i\gamma)}$
	$R_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2F(i\alpha_s) \cos[\alpha_s \tau]}{(\gamma^2 - \alpha_s^2) \alpha_s (\cos[\alpha_s] - (1+a)\alpha_s \sin[\alpha_s])}$
	$R_3 = 1/\gamma^2$
$P_2(\tau)$	$v(1, \tau) = \frac{P_0}{E_0 A_0 (1+a)} (R_1 + R_2 + R_3)$
	$R_1 = 0$
	$R_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2F(i\alpha_s) \cos[\alpha_s \tau]}{\alpha_s (\cos[\alpha_s] - (1+a)\alpha_s \sin[\alpha_s])}$
	$R_3 = 1$
$P_3(\tau)$	$v(1, \tau) = \frac{P_0 \gamma}{E_0 A_0 (1+a)} (R_1 + R_2 + R_3)$
	$R_1 = - \frac{F(-\gamma) e^{-\gamma \tau}}{\gamma G(-\gamma)}$
	$R_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{F(i\alpha_s) (2\alpha_s \sin[\alpha_s \tau] + 2\gamma \cos[\alpha_s \tau])}{(\gamma^2 + \alpha_s^2) \alpha_s (\cos[\alpha_s] - (1+a)\alpha_s \sin[\alpha_s])}$
	$R_3 = \frac{1}{\gamma}$

Tablo 2’de  $P_2(\tau) = P_0$  ve  $P_3(\tau) = P_0(1 - e^{-\gamma \tau})$  ’ye bağlı olarak bulunan deplasman ifadeleri verilmiştir

$$y_n = \frac{\sin[k_n \eta]}{\sin[a\eta + b]}, \quad k_n^2 = a^2 + \alpha_n^2 \tag{30}$$

**2.2.  $\sin^2[a\eta + b]$  ve  $e^{-a\eta}$  İfadeleri için Çözümler**  
(Solutions for  $\sin^2[a\eta + b]$  and  $e^{-a\eta}$  )

Daha önceki bölümlerde verilen aynı adımlar takip edilerek elastisite modülü ve yoğunluğu sinüzoidal veya üstel forma bağlı olarak değişen çubuklar için doğal frekans değerleri bulunabilir.

$\rho(\eta) = \rho_0 \sin^2[a\eta + b]$ -  $E(\eta) = E_0 \sin^2[a\eta + b]$  durumu için doğal frekanslar ve serbest titreşim mod’ları

$$y = \frac{z}{\sin[a\eta + b]} \tag{29}$$

değişken dönüşümü kullanılarak aşağıdaki gibi bulunmuştur

$\rho(\eta) = \rho_0 e^{-a\eta}$  -  $E(\eta) = E_0 e^{-a\eta}$  durumu için doğal frekanslar ve serbest titreşim mod’ları ise aşağıdaki gibidir.

$$y_n = e^{a\eta/2} \sin[k_n \eta], \quad k_n^2 = \alpha_n^2 - \frac{a^2}{4} \tag{31}$$

Bu ifade  $\Delta = a^2 - 4\alpha_n^2 < 0$  olması durumunda geçerlidir.

Deplasman ifadeleri ise yine daha önceki bölümde verilen aynı adımlar takip edilerek elde edilir. Tablo 3 ve 4, sinüzoidal ve üstel durumlar için çubuğun serbest ucundaki ( $\eta = 1$ ) aksenal yer değiştirme denklemlerini verir.

### 3. MOD SÜPERPOZİSYON METODU (MSM) İLE KARŞILAŞTIRMA VE SONUÇLAR (COMPARISON WITH MODE SUPERPOSITION METHOD (MSM) AND RESULTS)

Bu bölümde, yapılan çalışmalarda bulunan sonuçların doğruluğunu MSM ile karşılaştırarak göstereceğiz. Bilindiği gibi MSM üç ana adımdan oluşmaktadır [13].

1) Doğal frekansların ( $\alpha_n$ ) ve serbest titreşim mod'larının ( $y_n$ ) belirlenmesi, önceki bölümlerde nasıl bulunacakları anlatıldı.

2) Genel kütle ( $M_n$ ) ve Yüklerin ( $P_n$ ) bulunması:

$$M_n = c^2 \int_0^1 y_n^2 m(\eta) d\eta \quad (32)$$

$$P_n(\tau) = P(\tau) y_n(1) \quad (33)$$

3) Tek serbestlik dereceli çubuğun dinamik yük altındaki davranışının Duhamel integrali kullanılarak bulunması

$$R_n(\tau) = \frac{1}{M_n \alpha_n} \int_0^\tau P_n(\tau^*) \sin[\alpha_n(\tau - \tau^*)] d\tau^* \quad (34)$$

Deplasmanın hesaplanması ise aşağıdaki gibi yapılmıştır

$$v(\eta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n R_n(\tau) \quad (35)$$

Hesaplamalarda ilk on doğal frekans değeri kullanılmıştır. Şekil 1-3,  $P_1(\tau) = P_0(1 - \cos[\gamma\tau])$ ,  $P_2(\tau) = P_0$  ve  $P_3(\tau) = P_0(1 - e^{-\gamma\tau})$  eksenel yüklemeleri altındaki yoğunluğu ve elastisite modülü önceki bölümlerdeki gibi değişen homojen olmayan bir çubuğun serbest ucundaki yer değiştirmeleri gösterir. Hesaplamalarda  $\gamma$  değeri 0,6 olarak kabul edilmiştir. Tüm homojen olmayan çubuk formları için "a" inhomojenlik parametresindeki artış deplasman genliğinde değişime sebebiyet vermektedir. Elastisite

**Tablo 3.** Elastisite modülü ve yoğunluğu sinüzoidal forma bağlı olarak değişen çubuk için  $P_1(\tau)$ ,  $P_2(\tau)$  ve  $P_3(\tau)$  yükleme tipleri altındaki deplasman ifadeleri. (End displacement equations due to  $P_1(\tau)$ ,  $P_2(\tau)$  and  $P_3(\tau)$  for  $E(\eta) = E_0 \sin^2[a\eta + b]$  and  $\rho(\eta) = \rho_0 \sin^2[a\eta + b]$ )

$P_1(\tau)$	$v(1, \tau) = \frac{P_0 \gamma^2}{E_0 A_0 (\sin[a+b])} (R_1 + R_2 + R_3)$
	$R_1 = -\frac{F(i\gamma) \cos[\gamma\tau]}{\gamma^2 G(i\gamma)}$
	$R_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \cos[\alpha_s \tau] \sin[\sqrt{a^2 + \alpha_s^2}] \sqrt{a^2 + \alpha_s^2}}{s = 1 (\gamma^2 - \alpha_s^2) (\alpha_s^2 (a \cos[a+b] \cos[\sqrt{a^2 + \alpha_s^2}] + \sin[a+b]) (-\cos[\sqrt{a^2 + \alpha_s^2}] + \sqrt{a^2 + \alpha_s^2} \sin[\sqrt{a^2 + \alpha_s^2}]))}$
	$R_3 = \frac{\sin[a]}{\gamma^2 a \sin[b]}$
$P_2(\tau)$	$v(1, \tau) = \frac{P_0}{E_0 A_0 (\sin[a+b])} (R_1 + R_2 + R_3)$
	$R_1 = 0$
	$R_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \cos[\alpha_s \tau] \sin[\sqrt{a^2 + \alpha_s^2}] \sqrt{a^2 + \alpha_s^2}}{s = 1 \alpha_s^2 (a \cos[a+b] \cos[\sqrt{a^2 + \alpha_s^2}] + \sin[a+b]) (-\cos[\sqrt{a^2 + \alpha_s^2}] + \sqrt{a^2 + \alpha_s^2} \sin[\sqrt{a^2 + \alpha_s^2}]))}$
	$R_3 = \frac{\sin[a]}{a \sin[b]}$
$P_3(\tau)$	$v(1, \tau) = \frac{P_0 \gamma}{E_0 A_0 (\sin[a+b])} (R_1 + R_2 + R_3)$
	$R_1 = -\frac{F(-\gamma) e^{-\gamma\tau}}{\gamma G(-\gamma)}$
	$R_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2\alpha_s \sin[\alpha_s \tau] + 2\gamma \cos[\alpha_s \tau]) \sin[\sqrt{a^2 + \alpha_s^2}] \sqrt{a^2 + \alpha_s^2}}{s = 1 (\gamma^2 + \alpha_s^2) (\alpha_s^2 (a \cos[a+b] \cos[\sqrt{a^2 + \alpha_s^2}] + \sin[a+b]) (-\cos[\sqrt{a^2 + \alpha_s^2}] + \sqrt{a^2 + \alpha_s^2} \sin[\sqrt{a^2 + \alpha_s^2}]))}$
	$R_3 = \frac{\sin[a]}{\gamma a \sin[b]}$

**Tablo 4.** Elastisite modülü ve yoğunluğu üstel forma bağlı olarak değişen çubuk için  $P_1(\tau), P_2(\tau)$  ve  $P_3(\tau)$  yükleme tipleri altındaki deplasman ifadeleri. (End displacement equations due to  $P_1(\tau), P_2(\tau)$  and  $P_3(\tau)$  for  $E(\eta) = E_0 e^{-a\eta}$  and  $\rho(\eta) = \rho_0 e^{-a\eta}$ )

	$v(1, \tau) = \frac{2e^a P_0 \gamma^2}{E_0 A_0} (R_1 + R_2 + R_3)$
	$R_1 = -\frac{F(i\gamma) \cos[\gamma \tau]}{\gamma^2 G(i\gamma)}$
$P_1(\tau)$	$R_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \cos[\alpha_s \tau] \sinh[\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}] \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}}{(\gamma^2 - \alpha_s^2) (\alpha_s (-2\alpha_s ((2+a) \cosh[\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}] + \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}) \sinh[\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}]))}$
	$R_3 = \frac{\sinh[a/2]}{a(\cosh[a/2] + \sinh[a/2]) \gamma^2}$
	$v(1, \tau) = \frac{2e^a P_0}{E_0 A_0} (R_1 + R_2 + R_3)$
	$R_1 = 0$
$P_2(\tau)$	$R_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \cos[\alpha_s \tau] \sinh[\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}] \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}}{(\alpha_s (-2\alpha_s ((2+a) \cosh[\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}] + \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}) \sinh[\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}]))}$
	$R_3 = \frac{\sinh[a/2]}{a(\cosh[a/2] + \sinh[a/2])}$
	$v(1, \tau) = \frac{2e^a P_0 \gamma}{E_0 A_0} (R_1 + R_2 + R_3)$
	$R_1 = -\frac{F(-\gamma) e^{-\gamma \tau}}{\gamma G(-\gamma)}$
$P_3(\tau)$	$R_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2\alpha_s \sin[\alpha_s \tau] + 2\gamma \cos[\alpha_s \tau]) \sinh[\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}] \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}}{(\gamma^2 + \alpha_s^2) (\alpha_s (-2\alpha_s ((2+a) \cosh[\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}] + \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}) \sinh[\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4\alpha_s^2}]))}$
	$R_3 = \frac{\sinh[a/2]}{\gamma a(\cosh[a/2] + \sinh[a/2])}$

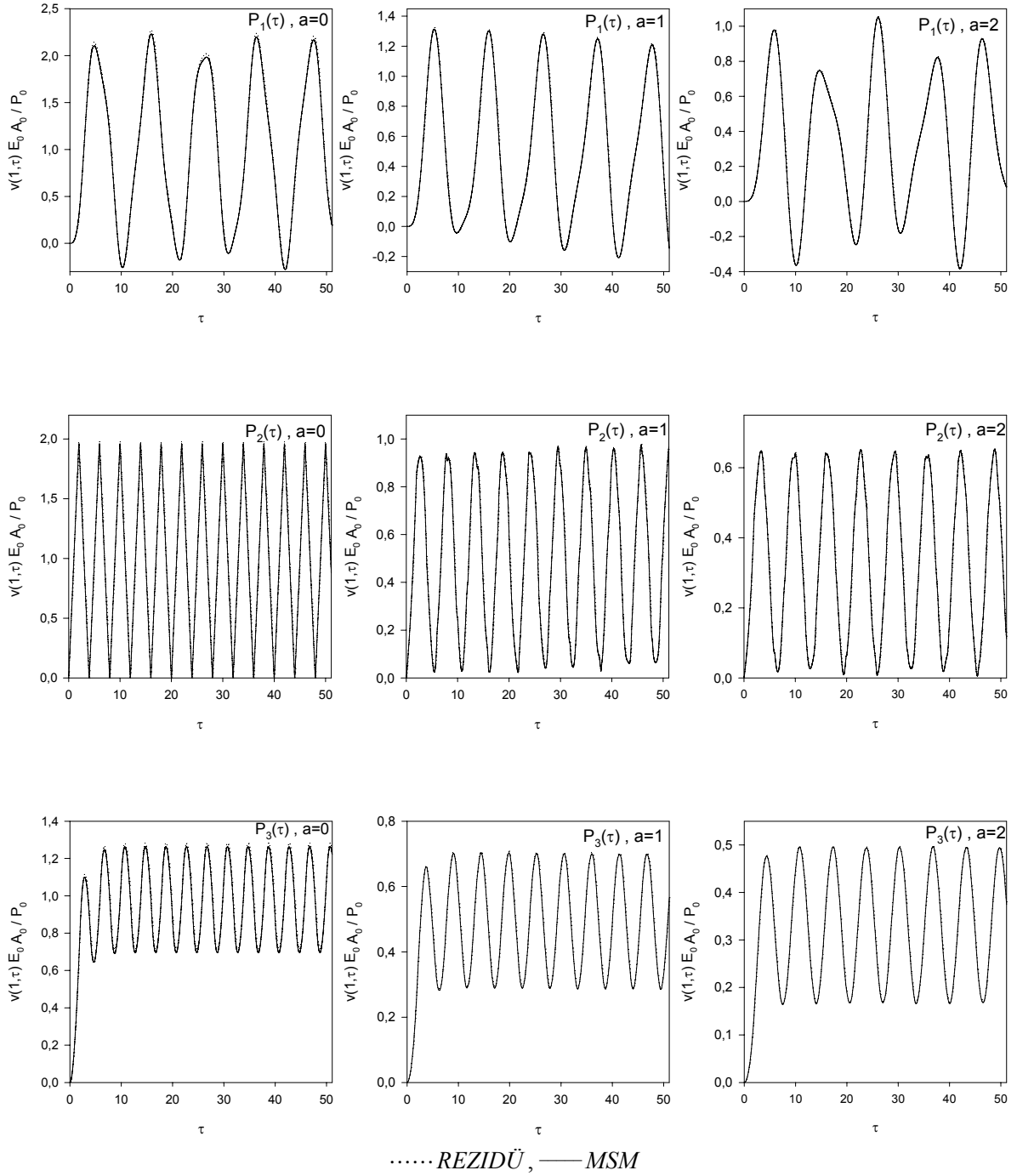
modülü ve yoğunluğu sinüzoidal forma bağlı olarak değişen homojen olmayan çubuk için bütün yükleme tiplerinde,  $a=2$  durumu için MSM ve kesin çözüm sonuçları arasında dikkat çekici bir farklılık oluşmaktadır. Bu durumda MSM'nin kesin çözümdeki sonuçlara ulaşabilmesi için ilk on frekans yerine ilk yüz frekans hesaplamalara dahil edilmiştir. Tablo-1'de inhomojenlik parametresinin  $a=1$  ve  $a=2$  olduğu durumlarda aynı mod değeri için elde edilen doğal frekans değerleri,  $a=0$  durumu için elde edilen doğal frekans değerine göre birbirlerine daha yakındır. Değişken kesit alanına sahip çubuklar için yapılan çalışmada ele alınan sinüzoidal kesitte ise  $a=0$  ve  $a=1$  durumları için elde edilen doğal frekans değerleri birbirine daha yakın çıkmıştır [10].

#### 4. SONUÇ (CONCLUSION)

Homojen olmayan yapıya sahip bir çubuğun serbest ve zorlanmış titreşim analizleri için kapalı form çözümleri Laplace dönüşümü kullanılarak yapılmıştır. Konu problem Laplace uzayında çözülürken, Laplace uzayından zaman uzayına geçiş için ise Rezidü teoremi kullanılmıştır. Rezidü teoremi kullanılarak bulunan sayısal sonuçlar, Mod Süperpozisyon metodu kullanılarak bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Burada açıkça görülen odur ki, bazı durumlarda analitik çözümde ilk on doğal frekans değerinin kullanılması sonuçlarda virgülden sonra altı haneli hassasiyet sağlarken, aynı sonuç için MSM'de ihtiyaç duyulan doğal frekans sayısı yüzölçümlere adetlere çıkmaktadır. Bu yöntemle kapalı form çözüm kullanılan optimizasyon problemlerinde, çözüm

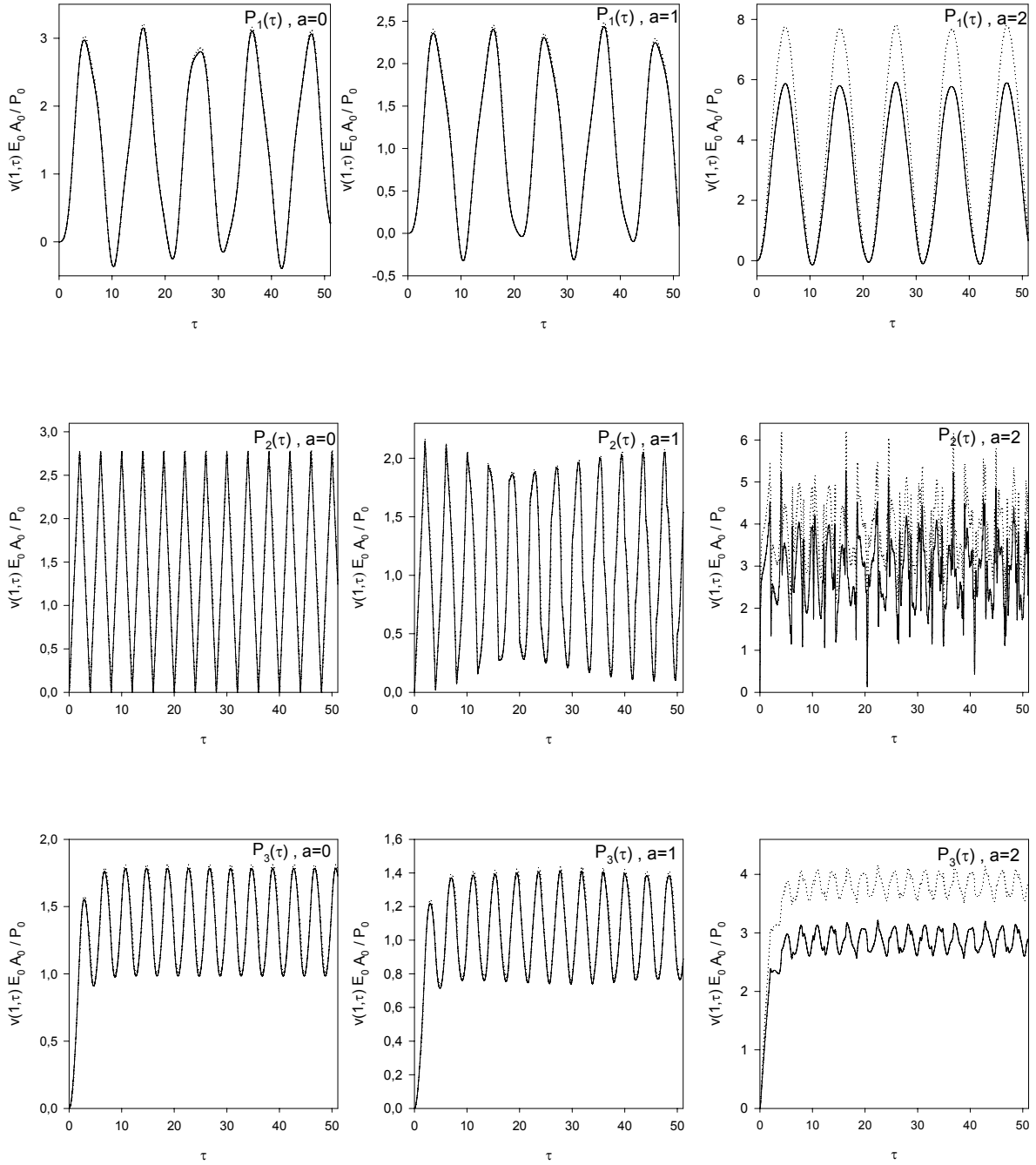
zamanı büyük oranda azalmaktadır. Bu çalışmada çubukların aksel titreşim analizinde sunulan kapalı-form çözümün etkinliği, çubukların eğilme problemlerinde de gözlemlenebilir. Bu konu ayrı bir araştırma konusudur. Dinamik analizde inhomojenlik parametresinin artmasıyla elastisite ve yoğunluğu üstel veya sinüzoidal forma bağlı olarak değişen çubuklar için benzer, polinom forma bağlı olarak değişen çubuklar için tam ters bir davranış

sergilendiği gözlemlenmiştir. Ayrıca polinom form için inhomojenlik parametresinin artmasıyla aynı mod için elde edilen doğal frekans değerleri birbirine daha yakın çıkmaktadır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, elastisite modülü ve yoğunluğun değişken olduğu sabit kesit alanına sahip çubukların gelecekteki titreşim analizi araştırmalarında bir referans oluşturacaktır.



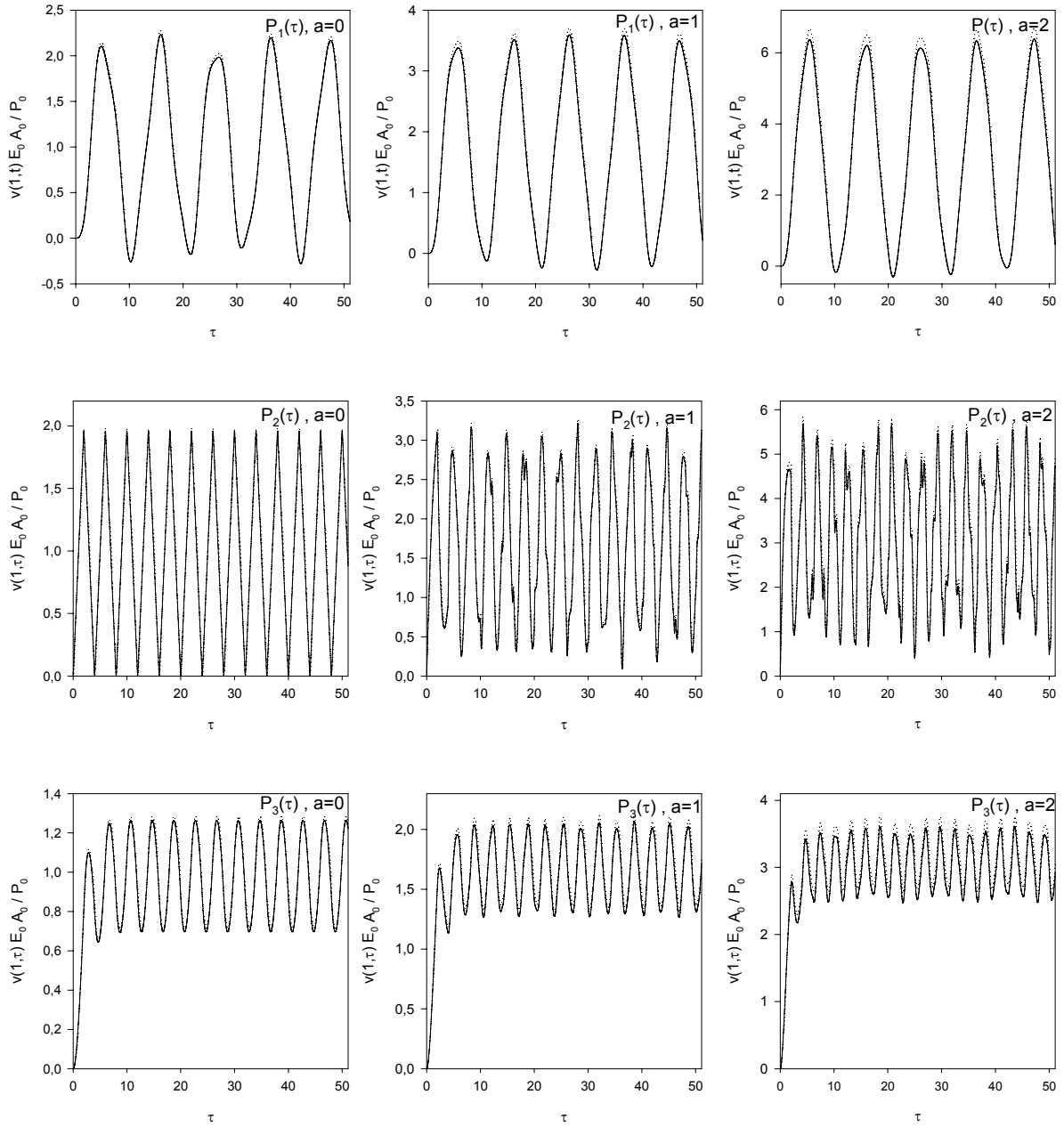
**Şekil 1.** Elastisite modülü ve yoğunluğu polinom forma bağlı olarak değişen çubuk için  $P_1(\tau)$ ,  $P_2(\tau)$  ve  $P_3(\tau)$  yüklemeleri altındaki deplasmanları (End displacement for  $E(\eta) = E_0(1+a\eta)^2$  and  $\rho(\eta) = \rho_0(1+a\eta)^2$  under  $P_1(\tau)$ ,  $P_2(\tau)$  and  $P_3(\tau)$ )





.....REZİDÜ, — MSM

**Şekil 2.** Elastisite modülü ve yoğunluğu sinüzoidal forma bağlı olarak değişen çubuk için  $P_1(\tau), P_2(\tau)$  ve  $P_3(\tau)$  yüklemeleri altındaki deplasmanları (End displacement for  $E(\eta) = E_o \sin^2[a\eta + b]$  and  $\rho(\eta) = \rho_o \sin^2[a\eta + b]$  under  $P_1(\tau), P_2(\tau)$  and  $P_3(\tau)$ )



.....REZİDÜ, — MSM

**Şekil 3.** Elastisite modülü ve yoğunluğu üstel forma bağlı olarak değişen çubuk için  $P_1(\tau)$ ,  $P_2(\tau)$  ve  $P_3(\tau)$  yüklemeleri altındaki deplasmanları (End displacement for  $E(\eta) = E_0 e^{-a\eta}$  and  $\rho(\eta) = \rho_0 e^{-a\eta}$  under  $P_1(\tau)$ ,  $P_2(\tau)$  and  $P_3(\tau)$ )

**KAYNAKLAR (REFERENCES)**

1. Kumar, B. M. ve Sujith, R. I., "Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods", **J. Sound. Vib.**, 207, 721-729, 1997.
2. Eisenberger, M., "Exact longitudinal vibration frequencies of a variable cross-section rod", **Appl. Acoust.**, 34, 123-130, 1991.
3. Abrate, S., "Vibration of non-uniform rods and beams", **J. Sound. Vib.**, 185, 703-716, 1995.
4. Li, Q. S., Wu, J. R., and Xu, J., "Longitudinal vibration of multi-step non-uniform structures with lumped masses and spring supports", **Appl. Acoust.**, 63, 333-350, 2002.
5. Li, Q. S., "Exact solutions for free longitudinal vibrations of non-uniform rods", **J. Sound. Vib.**, 234, 1-19, 2000.
6. Qiusheng, L., Hong, C. ve Guiqing, L., "Static and dynamic analysis of straight bars with variable cross-section", **Comput. Struct.**, 59, 1185-1191, 1996.
7. Raj, A. ve Sujith, R. I., "Closed-form solutions for the free longitudinal vibration of inhomogeneous rods", **J. Sound. Vib.**, 283, 1015-1030, 2005.
8. Nachum, S. ve Altus, E., "Natural frequencies and mode shapes of deterministic and stochastic non-homogeneous rods and beams", **J. Sound. Vib.**, 302, 903-924, 2007.
9. Horgan, C. O. ve Chan, A. M., "Vibration of inhomogeneous strings, rods and membranes", **J. Sound. Vib.**, 225, 503-513, 1999.
10. Çelebi, K., Keleş, İ. ve Tütüncü, N., "Exact solutions for forced vibration of non-uniform rods by Laplace transformation", **Gazi University Journal of Science**, 24(2), 347-353, 2011.
11. Manolis, G. D. ve Beskos, D. E., "Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and Laplace transform", **Int. J. Numer. Meth. Eng.**, 17, 573-599, 1981.
12. Weaver, W., Timoshenko, S.P. ve Young, D.H., "Vibration Problems in Engineering", **Wiley-Interscience**, New York, 1990.
13. Clough, R. W. ve Penzien, J., "Dynamics of Structures", **McGraw-Hill**, New York, 1993.
14. Calio, I. ve Elishakoff, I., "Vibration tailoring of inhomogeneous rod that possesses a trigonometric fundamental mode shape", **Journal of Sound and Vibration**, 309, 838-842, 2008.
15. Çelebi, K., "Vibration Analysis of Heterogeneous Rods and Beams", Doktora Tezi, **Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü**, 2010.

