

İKİ BOYUTLU ELASTODİNAMİK PROBLEMLERİN SINIR ELEMAN METODU İLE FORMÜLASYONU

İbrahim Ö. DENEME* ve **Hüseyin R. YERLİ****

*İnş. Müh. Böl., Müh. Fak., Aksaray Üniversitesi, 68100/Aksaray

**İnş. Müh. Böl., Müh.-Mim. Fak., Çukurova Üniversitesi, 01330/Adana

ideneme@aksaray.edu.tr, hryerli@cukurova.edu.tr

(Geliş/Received: 03.02.2009 ; Kabul/Accepted: 08.05.2009)

ÖZET

Bu çalışmada, iki boyutlu elastodinamik problemlerin çözümü için süreksiz kuadratik sınır eleman formülasyonu yapılmıştır. Fourier dönüşüm uzayında yapılan formülasyonda, integral denklemlerin çözümü Gauss sayısal integrasyon yöntemi ile yapılmaktadır. P sabit ve Q hareketli noktalarının aynı eleman üzerinde olması halinde ortaya çıkan, $1/r$ tekilliği kaldırılarak, $\ln(1/r)$ tekilliği ise uygun logaritmik ve standart Gauss yöntemlerinin kullanılmasıyla giderilmiştir. Yapılan formülasyona dayalı, iki boyutlu dinamik analizler için genel amaçlı bilgisayar programı hazırlanmıştır. Fourier dönüşüm uzayında dinamik analiz yapan program ile frekansa küçük değerler verilerek elastostatik analiz de yapılabilmektedir. İki adet dinamik problem çözülmüş ve elde edilen sonuçların, literatürde verilen sonuçlarla uyum içinde olduğu gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Elastodinamik, sınır eleman metodu, süreksiz kuadratik sınır eleman, Fourier uzayı.

FORMULATION OF 2D ELASTODYNAMIC PROBLEMS WITH BOUNDARY ELEMENT METHOD

ABSTRACT

In this study, discontinuous quadratic boundary element formulation is presented for analysis of elastodynamic problems. In the formulation, which is performed in Fourier transform space, the integral equations are solved numerically by Gaussian quadratures. $1/r$ and $\ln(1/r)$ singularities that exist when source point P and varied point Q are within same element either removed or manipulated by using logarithmic and standard Gaussian quadratures. Based on the formulation presented in this study, a general purpose computer program is developed, for two dimensional dynamic analyses. The program performs the analysis in Fourier transform space and the program which is developed for elastodynamic analysis can also be used for elastostatic analysis by assigning a small value to the frequency. Two dynamic problems are solved and the obtained results are compared with those in the literature.

Keywords: Elastodynamics, boundary element method, discontinuous quadratic boundary element, Fourier space.

1. GİRİŞ (INRODUCTION)

Sınır eleman yönteminde, ele alınan cismin davranışını idare eden diferansiyel denklem, cismin sınırları üzerinde tanımlanan integral denkleme dönüştürülerek, yalnızca çözüm bölgesi sınırının elemanlara bölünmesi yeterli olmaktadır [1-5]. Böylece, çözülecek denklem sayısı önemli ölçüde azalmaktadır. Sınır eleman yönteminin kullanılması ile problemin boyutlarının indirgenmesi, sonuçlardaki yüksek kesinlik ve

sonsuzda yayılma şartlarının dolaylı olarak hesaba katılması mümkün olmaktadır [6].

Sınır eleman yönteminde integral denklemlerin çözümünde kullanılan büyüklüklere bağlı olarak direkt sınır eleman yöntemi ve direkt olmayan sınır eleman yöntemi olmak üzere, iki farklı yaklaşım yapılmaktadır [1]. Direkt olmayan sınır eleman yaklaşımında integral denklemler fiziksel anlamı olmayan büyüklükler kullanılarak çözümlenip, deplasman ve geril-

me gibi sınır büyüklükleri belirlenmektedir. Direkt olmayan sınır eleman yaklaşımında ya birinci temel çözümün ya da ikinci temel çözümün süperpozisyonları kullanılır. İkinci temel çözüm (traction) kullanılarak yapılan çözümleme, deplasman süreksizliği olarak bilinmektedir [7]. Shen [8] çalışmasında zaman uzayında direkt olmayan yaklaşım kullanılarak iki boyutlu elastodinamik problemler için analitik çözümü incelemiştir.

Direkt yaklaşımda ise, integral denklemler doğrudan sınır büyüklükleri cinsinden yazılıp, bilinen ve bilinmeyen sınır büyüklükleri birbirine bağlanmaktadır. Bu çalışmada formülasyon, direkt sınır eleman yöntemi ile yapılmıştır. Bu yöntemde, probleme ait diferansiyel denklemler integral denklemlere dönüştürülmektedir. Problemden hacim kuvvetlerinin bulunması durumunda, hacim integralleri de sınır integraline dönüştürülerek integral denklemlerin tamamı sınır üzerinde tanımlanabilmektedir [9]. İntegral denklemlerin içinde yer alan temel çözümler, sonsuz ortamda birim yükleme yöntemiyle analitik olarak elde edilebilmektedir [10]. İntegral denklemler oluşturulduktan sonra ikinci adımda, çözüm bölgesinin sınırı küçük elemanlara bölünmekte ve probleme ait bilinmeyen sınır büyüklükleri integral denklemlerin sayısal çözümü ile hesaplanmaktadır. Frangi [11] integralleri parçalara ayırarak analitik olarak çözümlemeyi tasarlamıştır. İzotropik elastisite için tamamen farklı bir yaklaşım kullanılarak aynı yüksek dereceli tekillik problemlerinin (hypersingular) düzenlenmesi için formülasyon gerçekleştirilmiştir [12]. Bu teknik daha sonra elastodinamik problemler için genişletilmiştir [13].

Bu çalışmada, iki boyutlu elastodinamik problemler için süreksiz kuadratik sınır eleman formülasyonu yapılmıştır. Yapılan formülasyon dinamik halde literatürde verilen problemlere uygulanmıştır. Fourier dönüşüm uzayında yapılan formülasyonda, sabit noktanın ve integrasyon noktasının aynı sınır elemanı üzerinde bulunmasından dolayı oluşan $\ln(1/r)$ ve $1/r$ tekillik durumları göz önüne alınmaktadır. Yapılan formülasyona dayalı olarak, iki boyutlu dinamik analiz için genel amaçlı FORTRAN77 dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Ayrıca Fourier uzayında elde edilen sonuçların zaman uzayına dönüştürülmesi için FFT algoritması kullanılmıştır.

2. FORMÜLASYON (FORMULATION)

2.1. Elastodinamik Problemler için Sınır Eleman Denklemi (Boundary Element Equation for Elastodynamic Problems)

Elastodinamik problemler için sınır eleman denkleminin elde edilmesi, literatürde detaylı olarak verilmektedir [2, 4, 10, 14]. Hacim kuvvetleri ihmal edilerek, iki boyutlu bir cismin elastodinamik analizi için sınır eleman denkleminin matris formu,

$$\underline{c} \underline{u}(P) = \int_S \underline{G}(P, Q) \underline{t}(Q) dS - \int_S \underline{H}(P, Q) \underline{u}(Q) dS \quad (1)$$

şeklinindedir. (1) ifadesinde görülen S cismin sınırını, integralleri terimlerde görülen \underline{G} ve \underline{H} (2×2) boyutunda matrisler olup elastodinamik problemleri için elde edilmiş olan birinci ve ikinci temel çözümleri, \underline{u} ve \underline{t} ise (2×1) boyutunda deplasman ve gerilme vektörlerini, P ve Q noktaları ise integral işlemlerinde kullanılan sabit noktayı ve integrasyon noktasını temsil etmektedir.

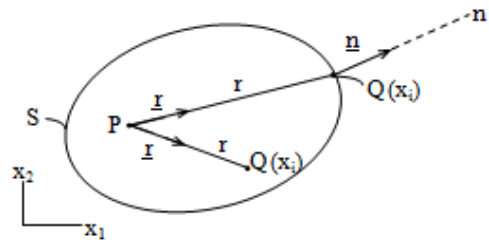
(1) denklemi, Şekil 1'de görülen P noktasında oluşan deplasmanları sınır yüzeyi (S) üzerinde tanımlanan integral ifadelerine bağlamaktadır. (1) denkleminin sol tarafında görülen (2×2) boyutundaki \underline{c} matrisinin değeri P noktasının konumuna bağlı olarak değişmektedir [2].

Yardımcı sistemin sonsuz ortam olarak tanımlanmasıyla elastodinamik problemler için verilen \underline{G} ve \underline{H} temel çözümleri analitik olarak hesaplanmaktadır [10]. Fourier dönüşüm uzayında elde edilen temel çözümler,

$$G_{\ell k} = \frac{1}{2\pi\mu} \left[\Psi \delta_{\ell k} - \chi r_{\ell} r_k \right] \quad (2)$$

$$H_{\ell k} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\frac{d\Psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) \left(\delta_{\ell k} \frac{\partial r}{\partial n} + r_k n_{\ell} \right) - \frac{2}{r} \chi \left(n_k r_{\ell} - 2r_{\ell} r_k \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\chi}{dr} r_{\ell} r_k \frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left(\frac{d\Psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) r_{\ell} n_k \right\} \quad (3)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada; μ kayma modülü, c_s S dalga hızının değerini, c_p P dalga hızının değerini, ρ kütleli yoğunluğu, ν Poisson oranını, $G_{\ell k}$ ve $H_{\ell k}$ sırasıyla birinci ve ikinci temel çözümleri, r sabit nokta (P) ve integrasyon noktası (Q) arasındaki uzaklığı, ve $\delta_{\ell k}$ ise Kronecker Delta'yı göstermektedir. $G_{\ell k}$ ve $H_{\ell k}$ ifadelerinde birinci indis (ℓ), P noktasında uygulanan birim yüklemenin yönünü, ikinci indis (k) ise Q noktasında oluşan deplasman ya da gerilme vektörü bileşeninin yönünü belirtmektedir.



Şekil 1. İki boyutlu elastik cisim (2-D Elastic Body)

(3) ifadesinde görülen c_s , c_p ve $\partial r / \partial n$ ifadeleri (4) eşitliklerinde verilmektedir.

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} ; c_p = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} c_s ; \frac{\partial r}{\partial n} = r_i n_i \quad (4)$$

İndisli notasyonda yazılan (2), (3) ve (4) eşitliklerindeki ℓ , k ve i gibi indisler, 1 ve 2 değerlerini almaktadır. (2) ve (3) denklemlerinde görülen Ψ ve χ fonksiyonları r uzaklığına bağlı olarak değişmektedir. Bu fonksiyonlar iki boyutlu analizde,

$$\Psi = K_0(a_s) + \frac{1}{a_s} \left[K_1(a_s) - \frac{c_s}{c_p} K_1(a_p) \right] \quad (5)$$

$$\chi = K_2(a_s) - \frac{c_s^2}{c_p^2} K_2(a_p) \quad (6)$$

olarak verilmektedir. (5) ve (6)'da görülen a_s ve a_p değerleri,

$$a_s = \frac{i\omega r}{c_s} ; a_p = \frac{i\omega r}{c_p} \quad (7)$$

ifadeleri ile tanımlanmaktadır.

(5) ve (6) denklemlerindeki K_0 , K_1 ve K_2 , ikinci tip modifiye Bessel fonksiyonlarını ve (7) ifadelerindeki ω ise açısal frekansı göstermektedir. Düzlem gerilme problemlerinde Poisson oranı (ν) yerine, efektif Poisson oranı ($\bar{\nu}$) kullanılmalıdır. Efektif Poisson oranı,

$$\bar{\nu} = \nu / (1 + \nu) \quad (8)$$

olarak tanımlanmaktadır. Sonuç olarak, (1) denklemi indisli notasyonda,

$$c_{\ell k} u_k(P) = \int_S G_{\ell k}(P, Q) t_k(Q) dS - \int_S H_{\ell k}(P, Q) u_k(Q) dS \quad (9)$$

ifadesine dönüşür.

2.2. Süreksiz Kuadratik Sınır Eleman Formülasyonu (Discontinuous Quadratic Boundary Element Formulation)

Sınır eleman yönteminde seçilen düğüm noktalarının konumuna göre sınır elemanları sürekli veya süreksiz sınır elemanı olarak adlandırılmaktadır. Düğüm noktalarının elemanın uç noktalarında seçilmesi halinde sürekli sınır elemanı söz konusu olmaktadır. Uç noktalarında seçilen düğüm noktaları komşu elemanlar için ortak düğüm noktaları olduğundan bu

noktalarda sınır büyüklükleri için süreklilik şartlarının sağlanması gerekecektir. Düğüm noktalarının elemanın iç bölgesinde seçilmesi halinde ise elemana süreksiz sınır elemanı denilmekte ve elemanlar arası süreklilik koşullarına ihtiyaç duyulmamaktadır.

Bu çalışmada, sınır eleman denkleminin sayısal olarak çözümü, süreksiz kuadratik sınır eleman formülasyonu kullanılarak yapılmaktadır. Bu amaçla, Şekil 2'de görüldüğü gibi, cismin sınırı (S), N adet sınır elemanına bölünmektedir. Şekil 2'de, S_m elemanı için düğüm noktaları, P_m^k ($m=1, \dots, N$ ve $k=1, 2, 3$) ile gösterilmiştir. Burada, N eleman sayısını, k ise her bir eleman üzerindeki düğüm noktası sayısını belirtmektedir. Şekil 2'de görülmekte olan m 'inci elemanın P_m^k sabit noktası için (1) denklemi,

$$c_m^k \underline{u}(P_m^k) = \int_S \underline{G}(P_m^k, Q) \underline{t}(Q) dS - \int_S \underline{H}(P_m^k, Q) \underline{u}(Q) dS \quad (10)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

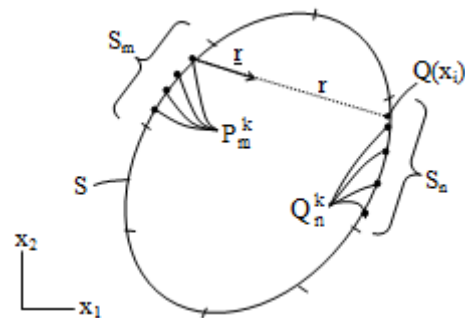
Sınır eleman formülasyonunda, eleman üzerinde yer alan bir Q noktasının koordinatları,

$$x_i = \sum_{k=1}^3 \phi_k(\xi) x_i^k \quad (11)$$

denklemi ile, sınır elemanı üzerindeki sınır büyüklükleri ise,

$$u_i = \sum_{k=1}^3 \phi_k(\xi) u_i^k ; t_i = \sum_{k=1}^3 \phi_k(\xi) t_i^k \quad (12)$$

ifadeleri ile verilmektedir. Yukarıdaki ifadelerde yer alan x_i Q integrasyon noktasının koordinatlarını, x_i^k elemana ait k düğüm noktasının koordinatlarını, u_i^k ve t_i^k k düğüm noktasındaki sınır büyüklüklerinin değerlerini, ϕ_k şekil fonksiyonlarını ve ξ ise Q noktasının boyutsuz koordinatını temsil etmektedir. (11) ve (12) ifadelerinde verilen şekil fonksiyonları süreksiz



Şekil 2. Cisim sınırının yüksek dereceli sınır elemanlarına bölünmesi (Higher order boundary element discretization of the body)

kuadratik eleman için boyutsuz koordinatlarda,

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi) &= \frac{1}{2} \frac{\xi}{\alpha} \left(\frac{\xi}{\alpha} - 1 \right) \\ \phi_2(\xi) &= 1 - \left(\frac{\xi}{\alpha} \right)^2 \\ \phi_3(\xi) &= \frac{1}{2} \frac{\xi}{\alpha} \left(\frac{\xi}{\alpha} + 1 \right)\end{aligned}\quad (13)$$

şeklinde tanımlanmaktadır ($-1 \leq \xi \leq 1$ ve $0 < \alpha < 1$). Süreksiz eleman için 1 ve 3 no'lu düğümlerin konumları simetrik olarak değişmektedir. Bu simetriklik α parametresi kullanılarak belirlenmektedir. α parametresi 1 ve 3 numaralı düğüm noktaları arası mesafenin eleman boyuna oranını temsil etmektedir. $\alpha=1.0$ olması sürekli sınır elemanı durumuna karşılık gelmektedir. Cisim sınırının N adet elemana bölünür ve (12) eşitliklerinde verilen sınır büyüklükleri ile ilgili ifadeler, (10) denkleminde yazılırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_m^k \mathbf{u}(P_m^k) &= \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 \left[\int_{-1}^1 J(\xi) \mathbf{G}(P_m^k, Q) \phi_s d\xi \right] \mathbf{t}(Q_n^s) \\ &\quad - \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 \left[\int_{-1}^1 J(\xi) \mathbf{H}(P_m^k, Q) \phi_s d\xi \right] \mathbf{u}(Q_n^s)\end{aligned}\quad (14)$$

denklemi elde edilir. Burada şekil fonksiyonları matrisi,

$$\phi_s = \begin{bmatrix} \phi_s & 0 \\ 0 & \phi_s \end{bmatrix} \quad (s=1, 2, 3) \quad (15)$$

şeklinde tarif edilmektedir. (14) eşitliğinde verilen $J(\xi)$, Jacobian matrisinin determinantını göstermektedir.

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{ks}^{mn} &= \int_{-1}^1 J(\xi) \mathbf{G}(P_m^k, Q) \phi_s d\xi \\ \mathbf{H}_{ks}^{mn} &= \int_{-1}^1 J(\xi) \mathbf{H}(P_m^k, Q) \phi_s d\xi\end{aligned}\quad (16)$$

tanımlamaları kullanılarak, (14) denklemini, P_m^k ($k=1, 2, 3$) sabit noktaları ve N adet sınır elemanı için yazılarak birleştirilirse, elde edilen denklemler matris formunda,

$$\tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{t}} \quad (17)$$

eşitliği bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{G}} &= (\mathbf{G}^{mn}) ; \tilde{\mathbf{H}} = \left(\mathbf{H}^{mn} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \delta_{mn} \right) \\ \tilde{\mathbf{u}} &= (\mathbf{u}^n) ; \tilde{\mathbf{t}} = (\mathbf{t}^n) \quad (m, n = 1, 2, \dots, N)\end{aligned}\quad (18)$$

olarak verilmiştir. (17) sistem denklemini 6N adet denklem içermektedir. Cisim sınırının N adet süreksiz kuadratik sınır elemanına bölünmesinden dolayı, toplam 12N adet sınır büyüklüğü (u, t) olduğu için, sınır şartları olarak her bir düğüm noktası üzerinde x_i ($i=1,2$) doğrultusunda t_i veya u_i bileşenlerinden birinin bilinmesi gerekmektedir. Böylece, bilinen sınır şartları, (17) sistem denkleminde yerine konularak, tüm bilinmeyenler denklemin sol tarafında toplanacak şekilde $\tilde{\mathbf{H}}$ ve $\tilde{\mathbf{G}}$ matrislerinin ilgili kolonlarının yer değiştirilmesiyle elde edilen $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{Y}$ formundaki denklem çözülerek, cismin sınırı üzerindeki bilinmeyen sınır büyüklükleri hesaplanmaktadır.

2.3. Tekillik (Singularity)

(17) sistem denkleminde bulunan $\tilde{\mathbf{G}}$ ve $\tilde{\mathbf{H}}$ sistem matrislerinin köşegen elemanlarını oluşturan \mathbf{G}_{ks}^{mm} ve \mathbf{H}_{ks}^{mm} matrisleri için,

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{ks}^{mm} &= \int_{S_m} \mathbf{G}(P_m^k, Q) \phi_s dS \\ \mathbf{H}_{ks}^{mm} &= \int_{S_m} \mathbf{H}(P_m^k, Q) \phi_s dS\end{aligned}\quad (19)$$

eşitlikleri yazılabilmektedir. Burada k, sabit düğüm nokta numarasını, s ise şekil fonksiyonu numarasını göstermektedir. Bu eşitliklerde, integral işlemlerinde kullanılan sabit nokta P_m^k ve integrasyon noktası Q, aynı sınır elemanı (S_m) üzerinde bulunmaktadır. Ayrıca, bu eşitlikler Cauchy kuralına göre yazılmakta ve dolayısıyla P_m^k ve Q noktalarının çakışmadığı kabul edilmektedir [10]. Ancak, P_m^k ve Q noktaları aynı eleman üzerinde bulunması durumunda, bu iki nokta arasındaki uzaklık (r), sıfıra yakın değer alacaktır. Bu durumda, temel çözümler için verilen eşitlikler göz önüne alınırsa, (19) denklemlerinde görülen integrantlarda tekillik durumu ortaya çıkmaktadır.

2.3.1. Statik hal (Static case)

Tekillik hali, P kaynak noktası ile Q hareketli noktanın aynı elemanda ($m=n$) olması durumunda ortaya çıktığı için, eleman formundaki düğüm noktaları yerel koordinatların (ξ) fonksiyonu olarak (20) eşitliklerinde verilmektedir (Şekil 3).

$$x = L_x (1 - \xi^2) ; y = (L_y / 2)(1 + \xi) \quad (20)$$

Yerel birim teğet “t” ve birim normal “n” ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathbf{t}(\xi) = \frac{dx(\xi)}{ds} = \frac{dx}{d\xi} \frac{1}{J(\xi)} ; \mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{k} \quad (21)$$

$$G^{1Q} = (1 + \alpha) \int \ln(1/\rho) \phi_Q(\rho(\xi)) J(\rho(\xi)) d\rho \quad (33a)$$

$$+ (1 - \alpha) \int \ln(1/t) \phi_Q(t(\xi)) J(t(\xi)) dt \quad (33b)$$

$$+ \int [-\ln(1 + \alpha) - 1/2 \ln\{((\alpha - \xi)^2 L_x^2 + L_y^2/4)\}] \phi_Q(\xi) J(\xi) d\xi \quad (33c)$$

$$+ 1/2(1 - \alpha) \ln\{(1 + \alpha)/(1 - \alpha)\} \int \phi_Q(z(\xi)) J(z(\xi)) dz \quad (33d)$$

Burada,

$$\rho = (\alpha - \xi)/(-1 - \alpha) ; t = (\alpha - \xi)/(\alpha - 1)$$

$$z = [2(\alpha - \xi)/(\alpha - 1)] - 1$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$$G^{2Q} = \int \ln(1/\xi) [\phi_Q(\xi) + \phi_Q(-\xi)] J(\xi) d\xi \quad (34a)$$

$$- 1/2 \int \ln(\xi^2 L_x^2 + L_y^2/4) \phi_Q(\xi) J(\xi) d\xi \quad (34b)$$

$$G^{3Q} = (1 + \alpha) \int \ln(1/\rho) \phi_Q(\rho(\xi)) J(\rho(\xi)) d\rho \quad (35a)$$

$$+ (1 - \alpha) \int \ln(1/t) \phi_Q(t(\xi)) J(t(\xi)) dt \quad (35b)$$

$$+ \int [-\ln(1 + \alpha) - 1/2 \ln\{((\alpha + \xi)^2 L_x^2 + L_y^2/4)\}] \phi_Q(\xi) J(\xi) d\xi \quad (35c)$$

$$+ 1/2(1 - \alpha) \ln\{(1 + \alpha)/(1 - \alpha)\} \int \phi_Q(z(\xi)) J(z(\xi)) dz \quad (35d)$$

Burada,

$$\rho = (\alpha + \xi)/(1 + \alpha) ; t = (\alpha + \xi)/(1 - \alpha)$$

$$z = [2(\alpha + \xi)/(1 - \alpha)] - 1$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Eşitlik (13) ve (22)'de verilen şekil fonksiyonları ve Jacobian terimleri; ρ , t veya z ye bağlı integrasyon parametreleri olarak değerlendirilmelidir. (33a), (33b), (34a), (35a) ve (35b) integralleri tekil integraller olup logaritmik Gauss sayısal integrasyon yöntemi ile hesaplanmaktadır. (33c), (33d), (34b), (35c) ve (35d) integralleri ise tekillik bulunmadığından dolayı standart Gauss sayısal integrasyon yöntemi ile hesaplanmaktadır. (30)'daki ifadeler (32)'de yer alan r_ℓ / r^p ve r_k / r^p terimlerinde yerine yazılırsa ilave bir işleme gerek kalmadan bu terimlerdeki tekillik sorunu çözülmüş olmaktadır. Böylece, tekil integraller içeren formülasyon, standart ve logaritmik Gauss sayısal integrasyon yöntemleri kullanılarak çözülmektedir.

Denklem (24)'de verilen, ikinci temel çözümleri içeren \underline{H}_{PQ}^{mm} matrisinin elemanları, sabit nokta ve hareketli noktanın aynı düğüm noktası olması ($P=Q$) durumunda rijit cisim hareketi yöntemi yardımıyla,

$$\underline{H}_{PP}^{mm} = - \sum_{n=1}^N \sum_{Q=1}^3 \underline{H}_{PQ}^{mn} \quad (m \neq n \text{ ve } P \neq Q \text{ için}) \quad (36)$$

eşitliği kullanılarak çözülmektedir [2].

2.3.2. Dinamik hal (Dynamic case)

Dinamik durumda ortaya çıkan tekillik problemi, (37) ifadesinde verilen integrallerin çözümlenerek \underline{G} ve \underline{H} matrislerinde ilgili yerlere yerleştirilmesi şeklinde ele alınmaktadır.

$$\int ()^{Dinamik} dS = \int ()^{Statik} dS + \int [()^{Dinamik} - ()^{Statik}] dS \quad (37)$$

(41) ifadesi kapalı formda her iki temel çözüm için yazılırsa,

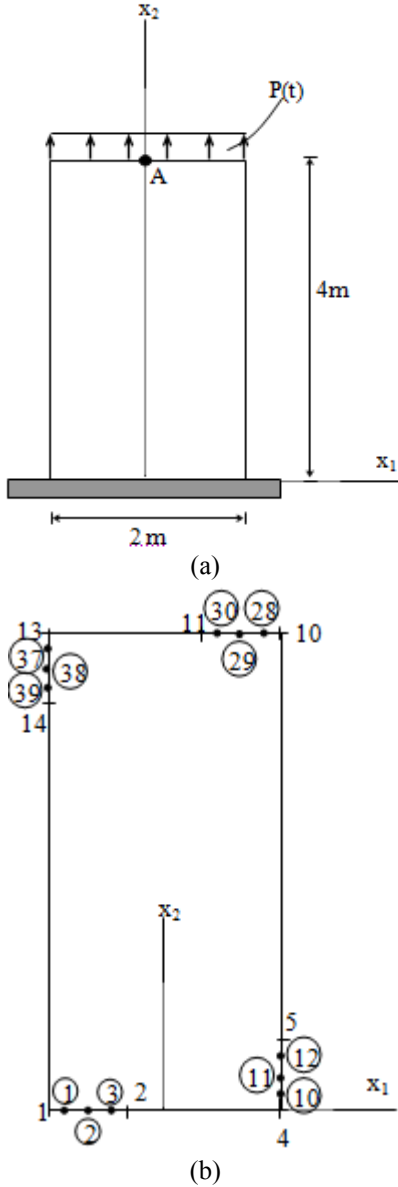
$$\underline{G}_D = \underline{G}_S + (\underline{G}_D - \underline{G}_S) \quad (38)$$

$$\underline{H}_D = \underline{H}_S + (\underline{H}_D - \underline{H}_S)$$

şeklinde iki terimin toplamı olarak ifade edilebilmektedir. Burada, \underline{G}_D ve \underline{H}_D , dinamik analiz için temel çözümleri, \underline{G}_S ve \underline{H}_S ise statik analiz için temel çözümleri göstermektedir. Buna göre, (38) denklemlerinin sağ tarafında bulunan ve statik temel çözümleri gösteren birinci terimler, aynı zamanda dinamik temel çözümlerin tekil olan kısımlarını temsil etmektedir. Bu terimler, statik durumdaki tekillik kaldırılması için yapılan formülasyon ile hesaplanabilmektedir. (38) denklemlerinin sağ tarafındaki ikinci terimlerde, tekil olan kısım bulunmadığından, bu terimler, standart Gauss integrasyon yöntemi ile belirlenebilmektedir. \underline{H}_D ifadesi için eşitlik (38)'de belirtilen yöntemle tekillik ifadesi kalkıyorsa da bu çalışmada, dinamik haldeki tekillik durumu için de statik halde kullanılan rijit cisim hareketi yöntemi kullanılmıştır [10, 14].

3. SAYISAL UYGULAMALAR (NUMERICAL EXAMPLES)

Sayısal uygulama olarak ele alınan örneklerde, Şekil 4a'da görülen, üniform P çekme kuvvetine maruz dikdörtgen plak problemi göz önüne alınmıştır. Plak, zamanla değişimi adım tipi ve üçgen tipi P çekme kuvvetinin etkisinde ele alınmıştır. Şekil 4a'da görülen A noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi incelenmektedir. Seçilen $4m \times 2m$ 'lik dikdörtgen plak Şekil 4b'de görüldüğü gibi alt ve üst sınırlarda 3'er sağ ve sol kenarlarda ise 6'şar eleman olmak üzere toplam 18 adet süreksiz kuadratik sınır elemanına bölünmektedir. Şekil 4b'de daire içerisinde verilen

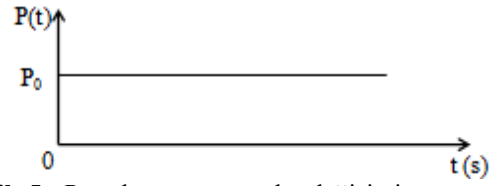


Şekil 4. Dikdörtgen plak ve kullanılan sınır eleman ağı (Problem geometry and boundary element mesh)

rakamlar formülasyonunda kullanılan düğüm noktalarını göstermektedir. Problemlerin analizinde, süreksizliğin sağlanması için boyutsuz düğüm noktası koordinatları $\xi_1=-0.75$, $\xi_2=0.$, $\xi_3=0.75$ ve $\alpha=0.75$ olarak seçilmiştir. Hesaplamalarda Poisson oranı $\nu=0$, kayma modülü $\mu=40\text{kPa}$, kütleli yoğunluk $\rho=1.0\text{kg/m}^3$, ve $P_0=1\text{kN/m}$ alınmıştır. Fourier uzayında elde edilen sonuçlar FFT algoritması kullanılarak zaman uzayına dönüştürülmüştür.

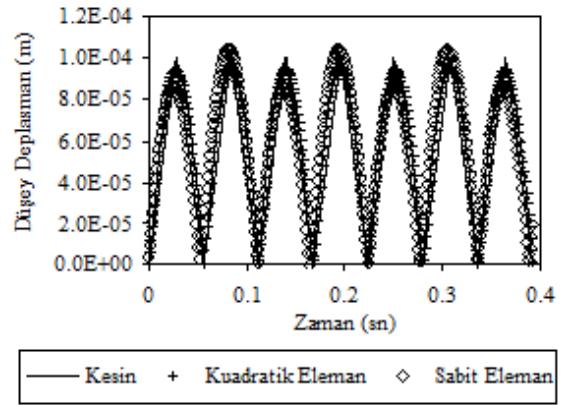
3.1. Adım Tipi Yük Etkisindeki Dikdörtgen Plak (Rectangular Plate Under Step Load)

Problem, zamanla değişimi Şekil 5'de görülen adım tipi P çekme kuvvetine maruz bırakılmıştır. Şekil 4a'da görülen A noktasında, P çekme kuvvetinden dolayı meydana gelen düşey deplasmanın zamanla değişimi incelenmektedir.



Şekil 5. P yükünün zamanla değişimi (Variation of loading with time)

A noktasında elde edilen düşey deplasman değerleri, Chien ve Wu [16]'dan alınan kesin sonuçlar ile Mengi ve ark. [10] tarafından geliştirilen sabit eleman formülasyonundan elde edilen sonuçlarla Şekil 6'da karşılaştırılmaktadır. Şekil 6 incelendiğinde, sonuçların birbirleri uyumlu olduğu, hatta süreksiz kuadratik sınır elemanlar ile bulunan sonuçların, kesin sonuçlara daha yakın olduğu görülmektedir.

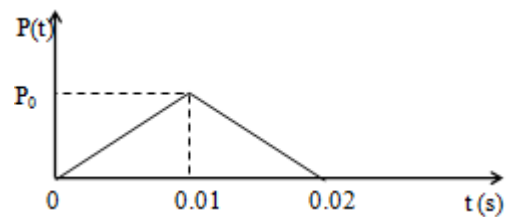


Şekil 6. A noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi (Variation of vertical displacement at point A)

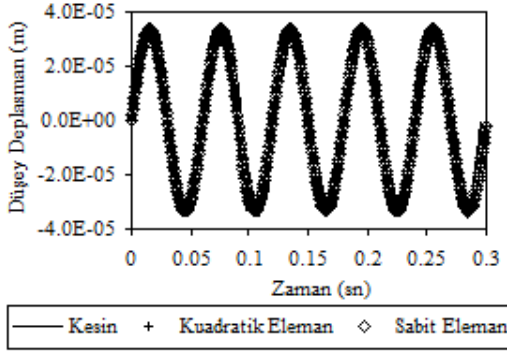
3.2. Üçgen Yük Etkisindeki Dikdörtgen Plak (Rectangular Plate Under Triangular Load)

Problemde incelenen dikdörtgen plak zamanla değişimi Şekil 7'de görülen üçgen tipi P çekme kuvvetine maruz bırakılmıştır. Şekil 4a'da görülen A noktasında P çekme kuvvetinden dolayı oluşan düşey deplasmanın zamanla değişimi incelenmektedir.

A noktasında elde edilen düşey deplasman değerleri, Chien ve Wu [16]'dan alınan kesin sonuçlar ile Mengi ve ark. [10] tarafından geliştirilen sabit eleman formülasyonundan elde edilen sonuçlarla Şekil 8'de karşılaştırılmaktadır.



Şekil 7. P Yükünün zamanla değişimi (Variation of loading with time)



Şekil 8. A noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi (Variation of vertical displacement at point A)

Şekil 8 incelendiğinde süreksiz küadratik sınır elemanları ile bulunan sonuçların, kesin sonuçlarla ve sabit eleman formülasyonu ile bulunan sonuçlarla uyumlu oldukları görülmektedir.

4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada, iki boyutlu elastodinamik problemlerin çözümü için sınır eleman formülasyonu yapılmıştır. Fourier dönüşüm uzayında yapılan formülasyonda, süreksiz küadratik sınır eleman yaklaşımı kullanılmıştır. Yapılan formülasyonda, integral işlemlerinde kullanılan sabit nokta ve integrasyon noktasının aynı sınır elemanı üzerinde bulunmasından kaynaklanan tekillik durumlarının giderilebilmesi için, logaritmik tekillik durumunda değişken dönüşümü uygulayarak logaritmik ve standart Gauss sayısal integrasyon yöntemi kullanılmıştır. $1/r$ tekilliğini içeren kısım ise bulunan r ifadesinin kullanılmasıyla tekillik problemi kaldırılarak standart Gauss sayısal integrasyon yöntemi ile hesaplanmıştır.

Problemlerin çözümünde kullanılan süreksiz küadratik sınır eleman formülasyonunda; seçilen eleman boyu, boyutsuz düğüm noktası koordinatları ve sayısal integrasyon yönteminde ele alınan Gauss nokta sayısı önem kazanmaktadır. Bu yüzden sayısal uygulamalarda süreksizliğin sağlanması için boyutsuz düğüm noktası koordinatları $\xi_1 = -0.75$, $\xi_2 = 0.$, $\xi_3 = 0.75$ ve $\alpha = 0.75$ olarak belirlenmiştir. İntegrasyon nokta sayısı olarak da 10 noktalı Gauss değerleri kullanılmıştır.

Bu çalışma kapsamında analizi yapılan problemlerin çözümünden elde edilen sonuçlarla literatürde verilen sonuçlar grafiksel olarak karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar sonucunda yapılan formülasyonun ve hazırlanan programların doğruluğu gösterilerek hazırlanan formülasyon ve programın güvenle kullanılacağı sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Beskos, D.E., Boundary Element Methods in Mechanics. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1987.
2. Brebbia, C.A., and Dominguez, J., Boundary Elements an Introductory Course. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1989.
3. Becker, A.A., The Boundary Element Method in Engineering. McGraw-Hill Book Company, London, 1992.
4. Banerjee, P.K., The Boundary Element Methods in Engineering. McGraw-Hill Book Company, London, 1994.
5. Aliabadi, M.H., The Boundary Element Method Applications in Solids and Structures. John Wiley & Sons Limited, West Sussex, 2002.
6. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., Boundary Element Techniques. Springer, New York, 1984.
7. Siebrits, E., and Crouch, S.L., Two-Dimensional Elastodynamics Displacement Discontinuity Method. **Int. J. for Num. Meth. in Eng.**, 37: 3229–3250, 1994.
8. Shen, S.Y., An Indirect Elastodynamic Boundary Element Method with Analytic Bases. **Int. J. for Num. Meth. in Eng.**, 57: 767–792, 2003.
9. Partridge, P.W., Brebbia, C.A., and Wrobel, L.C., The Dual Reciprocity Boundary Element Method. Computational Mechanics Publications, Southampton and Elsevier Applied Science, London, 1992.
10. Mengi, Y., Tanrıku, A.H., and Tanrıku, A.K., Boundary Element Method for Elastic Media, An Introduction. ODTÜ Basım İşliğı, Ankara, 1994.
11. Frangi, A., Elastodynamics By BEM: A New Direct Formulation. **Int. J. for Num. Meth. in Eng.**, 45: 721–740, 1999.
12. Nedelec, J.C., Integral Equations with Non Integrable Kernels. **Integral Equations and Operator Theory**, 5: 562-572, 1982.
13. Nishimura, N., and Kobayashi, S., A Regularized Boundary Integral Equation Method for Elastodynamic Crack Problems, **Comp. Mech.**, 4: 319-328, 1989.
14. Manolis, G.D., ve Beskos, D.E., Boundary Element Method in Elastodynamics. Unwin Hyman, London, 1988.
15. Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., and Vetterling, V.T., Numerical Recipes, Cambridge University Press, New York, 1986.
16. Chien, C-C., and Wu, T-Y., A Particular Integral BEM/Time-Discontinuous FEM Metodology for Solving 2-D Elastodynamic Problems. **Int. J. of Solids and Struc.**, 38, 289-306, 2001.