

HOMOJEN OLMAYAN MALZEMEDEN YAPILMIŞ İÇİ DOLU DÖNEN DİSKLERİN ELASTİK-PLASTİK GERİLME ANALİZİ

Ahmet N. ERASLAN, Tunç APATAY* ve Müfit GÜLGEÇ*

Mühendislik Bilimleri Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, 06531, Ankara,
aderaslan@metu.edu.tr.

* Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Gazi Üniversitesi, Maltepe, 06570, Ankara,
tapatay@gazi.edu.tr, mgulgec@gazi.edu.tr

(Geliş/Received: 28.03.2007; Kabul/Accepted: 11.04.2008)

ÖZET

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş (FDM) değişken kalınlıklı dönen içi dolu disklerde elastik ve kısmen plastik gerilme durumları için sayısal hesaplamalı bir model geliştirilmiştir. Disk malzemesinin elastisite modülü, Poisson oranı, akma limiti ve yoğunluğu radyal doğrultuda herhangi bir fonksiyon cinsinden değişebilmektedir. Küçük deformasyonlar ve düzlem gerilme durumunun geçerli olduğu kabul edilmiştir. Von Mises kriteri, toplam deformasyon teorisi ve Swift tipinde lineer olmayan bir pekleşme kuralı kullanılarak dönen diskin kısmen plastik davranışını tarif eden bir diferansiyel denklem elde edilmiştir. Bu diferansiyel denklem lineer olmadığı için sayısal çözümü bilgisayar ortamında Newton yinelemeleriyle birleştirilmiş bir shooting metodu kullanılarak elde edilmiştir. Oluşturulan sayısal hesaplamalı model, analitik çözümlerle karşılaştırılarak doğrulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, dönen diskler, von Mises kriteri, lineer olmayan gerilme pekleşmesi, shooting metodu.

ELASTIC-PLASTIC STRESS ANALYSIS OF NONHOMOGENEOUS ROTATING SOLID DISCS

ABSTRACT

A computational model is developed for the analysis of elastic and partially plastic stress states in functionally graded (FGM) variable thickness rotating solid disks. The modulus of elasticity, Poisson's ratio, uniaxial yield limit and density of the disk material are assumed to vary radially in any prescribed functional forms. Small deformations and a state of plane stress are presumed. Using the von Mises yield criterion, total deformation theory and a Swift-type nonlinear hardening law, a single nonlinear equation describing elastoplastic behavior of rotating disk is obtained. A shooting technique using Newton iterations with numerically approximated tangents is designed and used for the computer solution of the governing equation. The model is verified by comparing predictions with analytical solutions.

Keywords: Functionally graded material, rotating disk, von Mises criterion, nonlinear hardening, shooting method.

1.GİRİŞ (INTRODUCTION)

Mühendislik uygulamalarında kullanılan makinaların çoğu dönen elemanlar içermektedir: turbo makinalar, gaz türbinleri, volanlar, kesici takımlar, otomobiller vb. [1,2]. Bu nedenle söz konusu elemanlar için

gerilme ve yer değiştirmelerin, teorik ve deneysel analizi üzerine birçok çalışma yapılmıştır ve bu çalışmalar halen devam etmektedir. İçi dolu diskin mühendislikte uygulama alanı olmamasına rağmen dönen disk probleminin temeli olduğundan literatürde önemli bir yeri vardır. Sabit kalınlıklı içi dolu dönen

bir diskin kısmen plastik ilk doğru analitik çözümü 1984 yılında Gamer [3,4] tarafından yapılmıştır. Gamer'in çözümü düzlem gerilme varsayımına dayalı olup plastik deformasyon için lineer birim şekil değiştirme pekleşmesini ve Tresca akma kriterini esas almıştır. Gamer' in çalışmasından yola çıkarak pek çok araştırmacı farklı sınır şartlarında ve geometrideki dönen disklerin elastik-plastik çözümleri üzerine çalışmalar yapmışlardır [5-9].

Son yıllarda malzeme özelliklerinin disk boyunca değiştirilebildiği üretim yöntemlerinin geliştirilmesi elastik ve plastik gerilme analizi üzerine yapılan çalışmalar yeni bir boyut kazanmıştır. Değişken elastisite modülüne sahip içi dolu dönen diskin elastik çözümü Horgan ve Chan [10] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada diskin yoğunluğu ve kalınlığı sabit olarak alınmıştır, çalışmada elastisite modülünün değişimi $E(r) = E_0 (r/b)^n$ olarak tanımlanmıştır.

Burada E_0 elastisite modülünün referans değerini, r radyal koordinatı, n malzeme parametresini, b ise diskin çapını ifade etmektedir. Ancak bu ifade içi dolu disk için fiziksel olarak anlamlı değildir, çünkü disk merkezi $r=0$ da, $E=0$ olmaktadır. Literatürde homojen olmayan malzemelerden yapılmış diskler üzerine bazı çalışmalar, Güven [11], Durodola ve Attia [12], Eraslan ve Akış [13] tarafından yapılmıştır. Yapılan çalışmalar bu disklerin homojen disklere göre daha avantajlı olduğunu göstermektedir.

Bu çalışmanın amacı, içi dolu dönen bir disk probleminde geometriyi ve malzeme özelliklerini belirleyen parametrelerin tümünün birden değiştirilerek modellenilebildiği bir diskin elastik-plastik analizini sayısal olarak yapmaktır. Malzeme özelliklerinin bu şekilde değiştiği içi dolu dönen diskler için literatürde elastik-plastik bir çözüm bulunmamaktadır. Malzemede plastik deformasyon için von Mises akma kriteri ve lineer olmayan sertleşme davranışını modellemek amacıyla Swift sertleşme kuralı kullanılmıştır. Diskin kalınlığı ise sabit alınmıştır.

2. TEMEL DENKLEMLER (BASIC EQUATIONS)

Bünye denklemi, sayısal hesaplama etkinliğini arttırmak ve genel avantajları bilinen nedeniyle boyutsuz büyüklükler cinsinden elde edilecektir. Söz konusu boyutsuz büyüklükler, radyal koordinat: $\bar{r} = r/b$, normal gerilme bileşenleri: $\bar{\sigma}_i = \sigma_i / \sigma_{0C}$, akma gerilmesi: $\bar{\sigma}_y = \sigma_y / \sigma_{0C}$, akma limiti: $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0(r) / \sigma_{0C}$, birim şekil değiştirme bileşenleri: $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i E_0 / \sigma_{0C}$, radyal yerdeğiştirme: $\bar{u} = u E_0 / b \sigma_{0C}$, elastisite modülü: $\bar{E} = E(r) / E_0$, boyutsuz açısal hız: $\Omega = (\rho_0 \omega^2 b^2 / \sigma_{0C})^{1/2}$, boyutsuz pekleşme parametresi: $H = \eta \sigma_{0C} / E_0$, kütle yoğunluğu: $\bar{\rho} = \rho(r) / \rho_0$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu ifadelerde, σ_{0C} ve ρ_0

malzemenin disk merkezi $r=0$ da akma limiti ve yoğunluk değerleri, ω açısal hız, η pekleşme parametresidir. Aşağıdaki denklemler, bu şekilde tanımlanan boyutsuz büyüklükler cinsinden yazılmıştır, ancak daha sade bir notasyon açısından parametrelerin üzerindeki çizgiler kaldırılmıştır.

Disk kalınlığının yarıçapa oranla küçük olduğu kabulüyle simetri eksenine doğrultusundaki gerilme bileşeni, σ_z , ihmal edilerek problem düzlem gerilme durumuna indirgenir. Düzlem gerilme durumunun boyutlu ifadeleri Timoshenko ve Goodier [1]' da verilmektedir. Böylece, sadece radyal doğrultudaki kuvvetlerin dengesi ile kalınlığı $h(r)$ fonksiyonuyla değişen bir disk için hareket denklemi;

$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho\Omega^2 r^2 = 0 \quad (1)$$

ve uygunluk denklemi $\varepsilon_r = d(r\varepsilon_\theta)/dr$ şeklinde yazılır [1]. Toplam birim şekil değiştirme bileşenleri, $\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p$ şeklinde elastik ve plastik bileşenlerinin toplamı olup ε_i^e ile ifade edilen elastik birim şekil değiştirme kısmının Hooke kanunu ile yerine yazılmasıyla;

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu\sigma_\theta] + \varepsilon_r^p \quad (2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu\sigma_r] + \varepsilon_\theta^p \quad (3)$$

biçiminde elde edilir. Bu ifadelerde ε_i^p , toplam birim şekil değiştirme bileşeninin plastik kısmıdır. Diğer taraftan düzlem gerilme durumu için von Mises akma kriterine göre akma gerilmesi;

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2} \quad (4)$$

olarak ifade edilir [14]. Plastik birim şekil değiştirme ve gerilmeler arasındaki bağıntılar, toplam deformasyon teorisi yardımıyla;

$$\varepsilon_r^p = \frac{\varepsilon_{EQ}}{\sigma_Y} \left[\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_\theta \right] \quad (5)$$

$$\varepsilon_\theta^p = \frac{\varepsilon_{EQ}}{\sigma_Y} \left[\sigma_\theta - \frac{1}{2}\sigma_r \right] \quad (6)$$

şeklinde yazılır [14]. Burada ε_{EQ} , eşdeğer plastik birim şekil değiştirmedir. Plastik bölgede lineer olmayan pekleşme davranışı Swift sertleşme kuralı ile modellenmiştir [9]. Buna göre akma gerilmesi ve eşdeğer plastik birim şekil değiştirme arasındaki ilişki;

$$\sigma_Y = \sigma_0 \left(1 + H \varepsilon_{EQ}\right)^{1/m} \quad (7)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadede H ve m malzeme ile ilgili sertleşme parametreleridir ve $m=1$ alındığında çözüm lineer pekleşmeli malzeme modeline indirgenebilir. Buradan eşdeğer birim şekil değiştirme;

$$\varepsilon_{EQ} = \frac{1}{H} \left[\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_0} \right)^m - 1 \right] \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir.

3. SAYISAL HESAPLAMALI MODEL (THE COMPUTATIONAL MODEL)

(2) ve (3) ile verilen toplam birim şekil değiştirme bileşenlerinin uygunluk denkleminde yerine yazılması ile elastik-plastik bünye denklemi;

$$\frac{\varepsilon_\theta^p - \varepsilon_r^p}{r} E - \frac{(1+\nu)(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + E \frac{d\varepsilon_\theta^p}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \sigma_r \frac{d\nu}{dr} - \frac{(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)}{E} \frac{dE}{dr} = 0 \quad (9)$$

şeklinde elde edilir. (9) denkleminde, plastik birim şekil değiştirme bileşenleri sıfır alınarak elastik bünye denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{(1+\nu)(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + \nu \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{d\sigma_\theta}{dr} + \sigma_r \frac{d\nu}{dr} + \frac{(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)}{E} \frac{dE}{dr} = 0 \quad (10)$$

(9) denklemindeki $d\varepsilon_\theta^p/dr$ terimi (6) ile verilen teğetsel birim şekil değiştirme bileşeni ifadesinden;

$$\frac{d\varepsilon_\theta^p}{dr} = -\frac{mN_2(1+N_3)}{H\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{dr} + \frac{1}{H\sigma_Y} \left[\left(-\frac{N_3}{2} - N_1N_2N_4 \right) \frac{d\sigma_r}{dr} + (N_3 - N_2^2N_4) \frac{d\sigma_\theta}{dr} \right] \quad (11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$N_1 = \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{2\sigma_Y}; N_2 = \frac{2\sigma_\theta - \sigma_r}{2\sigma_Y}; N_3 = (\sigma_Y / \sigma_0)^m - 1; N_4 = N_3 - m(\sigma_Y / \sigma_0)^m \quad (12)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bünye denkleminin çözümü için $Y = hr\sigma_r$ şeklinde bir gerilme fonksiyonu tanımlanırsa radyal gerilme bileşeni, gerilme fonksiyonu cinsinden;

$$\sigma_r = \frac{Y}{hr} \quad (13)$$

şeklinde yazılır. Teğetsel gerilme bileşeni ise hareket denkleminde;

$$\sigma_\theta = \rho r^2 \Omega^2 + \frac{1}{h} \frac{dY}{dr} \quad (14)$$

olarak elde edilir. (13) ve (14)'ün (5) ve (6)'da yerine yazılmasıyla plastik birim şekil değiştirme bileşenleri de gerilme fonksiyonu cinsinden ifade edilir. Bu ifadelerin türevleriyle birlikte (9) denkleminde yerlerine yazılmasıyla;

$$\frac{d^2Y}{dr^2} = F\left(r, Y, \frac{dY}{dr}\right) \text{ ve } Y(0) = 0; Y(1) = 0 \quad (15)$$

formunda ikinci derece lineer olmayan sınır değer problemi elde edilir ve bu problem sınır şartları ile ancak sayısal olarak çözülebilir. Bu denklemin açık hali, oldukça uzun olmasından dolayı burada yazılmamıştır.

(15) ile gösterilen ikinci derece sınır değer problemi, $\phi_1(r) = Y(r)$ ve $\phi_2(r) = dY(r)/dr$ yeni değişkenleri tanımlanarak

$$\frac{d\phi_1(r)}{dr} = \frac{dY(r)}{dr} = \phi_2$$

$$\frac{d\phi_2(r)}{dr} = \frac{d^2Y(r)}{dr^2} = F(r, \phi_1, \phi_2)$$

şeklinde bir başlangıç değer problem sistemine dönüştürülebilir. Burada başlangıç değerleri $\phi_1(0) = 0$ ve $\phi_2(0) = [dY(r)/dr]_{r=0}$ şeklinde yazılabilir. $r=0$ 'da dY/dr değeri bilinmediği için diğer sınır şartı $Y(1) = 0$ 'ı sağlayacak dY/dr değeri Newton iterasyon metodu ile bulunur. Bunun için $\phi_2^0(0)$ 'a değerler verilerek $F = \phi_1(1)$ değeri, aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$I. \phi_2(0) = \phi_2^k(0) \quad \text{için } F_1 = \phi_1(1)$$

$$II. \phi_2(0) = \phi_2^k(0) + \Delta_\phi \quad \text{için } F_2 = \phi_1(1)$$

$$III. \phi_2(0) = \phi_2^k(0) - \Delta_\phi \quad \text{için } F_3 = \phi_1(1)$$

Yineleme için seçilen değerden sonra alınacak $\phi_2^{k+1}(0)$ ise şu formülden elde edilir:

$$\phi_2^{k+1}(0) = \phi_2^k(0) - \frac{(2\Delta_\phi)F_1}{F_2 - F_3} \quad (16)$$

(16) denkleminde Δ_ϕ , 10^{-3} mertebesinde pozitif bir artıştır. İterasyon, k . yinelemede $|\phi_2^{k+1}(0) - \phi_2^k(0)| < \varepsilon_T$ şartı sağlanıncaya kadar devam eder. Bu ifadede ε_T hata toleransıdır ve 10^{-9} mertebesinde alınmıştır. Bu şekilde tanımlanan başlangıç değer probleminin çözümü için Hindmarsh [15] tarafından geliştirilen LSODE yazılımı kullanılmıştır.

4. SAYISAL HESAPLAMALI MODELİN DOĞRULUĞU (VERIFICATION OF THE COMPUTATIONAL MODEL)

Bu bölümde sayısal hesaplamalı modelin analitik sonuçlarla uyumu gösterilmiştir. Bunun için hem Eraslan ve Akış [13]'ün içi dolu dönen disk için analitik sonuçları sayısal metodla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış, hem de malzeme özelliklerinin radyal koordinatın fonksiyonu olarak, $E(r) = E_0(1 + E_1 r)$, $\sigma_0(r) = \sigma_{0c}(1 + \sigma_{01} r)$, $\nu(r) = \nu_0(1 + \nu_1 r)$ ve $\rho(r) = \rho_0(1 + \rho_1 r)$ şeklinde lineer olarak değiştiği sabit kalınlıklı içi dolu dönen bir disk için elastik çözüm sunulmuş ve sayısal hesaplamalı yöntemle bulunan elastik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Burada; E_1 , σ_{01} , ν_1 ve ρ_1 radyal koordinat boyunca değişimi belirleyen parametrelerdir. Bu ifadelerin boyutsuz formdaki ifadeleri şu şekildedir: $\rho = 1 + \rho_1 r$, $\sigma_0 = 1 + \sigma_{01} r$ ve $\nu = \nu_0(1 + \nu_1 r)$.

Problemin elastik analitik çözüm yöntemi aşağıda açıklanmıştır:

Radyal ve teğetsel gerilme bileşenlerinin Hooke kanunu yardımıyla yerdeğiştirme cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right] \text{ ve } \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right] \quad (17)$$

Bu ifadelerin hareket denkleminde yerine yazılmasıyla elastik bünye denklemi;

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{E} \frac{dE}{dr} + \frac{2\nu}{1-\nu^2} \frac{d\nu}{dr} \right] - \frac{u}{r^2} \cdot \left[1 - r\nu \frac{1}{E} \frac{dE}{dr} - \frac{r(1+\nu^2)}{1-\nu^2} \frac{d\nu}{dr} \right] = - \frac{\Omega^2 r(1-\nu^2)\rho}{E} \quad (18)$$

şeklinde elde edilir. $E(r) = E$, $\nu(r) = \nu$ ve $\rho(r) = \rho$ alındığında diferansiyel denklem;

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = - \frac{\Omega^2 r^3(1-\nu^2)\rho}{E} \quad (19)$$

şeklini alır. Bu denklem ise sabit kalınlıklı dönen homojen diskin denklemidir [1,2].

(18) ile verilen diferansiyel denklemin genel çözümü;

$$u(r) = C_1 P(r) + C_2 Q(r) + R(r) \quad (20)$$

şeklinindedir. Burada $R(r)$ özel çözümdür, homojen çözümü oluşturan $P(r)$ ve $Q(r)$ terimleri Mapple [16] yazılımı yardımıyla seri çözüm metoduyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P(r) = r \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i r^i \right], \quad Q(r) = Q_1(r) + Q_2(r) \quad (21)$$

Bu ifadelerde;

$$Q_1(r) = - \frac{\ln r(1-\nu_0)}{1+\nu_0} b_1 b_2 P(r), \quad (22)$$

$$Q_2(r) = \frac{1}{r} \left[-2 + \sum_{i=1}^{\infty} t_i r^i \right]$$

$$a_i = (-1)^{i+1} 2 \frac{[i(i-1)-1] + \nu_0}{(i+2)! i! (1-\nu_0)} \prod_{k=1}^i b_k, \quad (23)$$

$$b_k = E_1 [k(k-1) - 1 + \nu_0] - \nu_0 \nu_1$$

şeklinde tanımlanmıştır. t_i terimlerinin ilk birkaçı ise şu şekildedir:

$$t_1 = 2 \frac{(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)} b_1$$

$$t_2 = -2E_1^2(1-\nu_0) + \frac{2E_1\nu_0(1-2\nu_0+3\nu_0^2)\nu_1}{(1+\nu_0)(1-\nu_0)} +$$

$$\frac{2\nu_0^2(1+2\nu_0-\nu_0^2+2\nu_0^3)\nu_1^2}{(1+\nu_0)^2(1-\nu_0)^2} \quad (24)$$

$$t_3 = \frac{1}{9} E_1^3 (1+14\nu_0-19\nu_0^2+4\nu_0^3) +$$

$$4E_1^2\nu_0 \frac{-2+2\nu_0+5\nu_0^2-14\nu_0^3+3\nu_0^4}{9(1-\nu_0)(1+\nu_0)} \nu_1 +$$

$$E_1\nu_0^2 \frac{(-7-41\nu_0+55\nu_0^2-67\nu_0^3+12\nu_0^4)}{9(1+\nu_0)(1-\nu_0)^2} \nu_1^2 +$$

$$2\nu_0^3 \frac{(1-17\nu_0+15\nu_0^2-13\nu_0^3+2\nu_0^4)}{9(1+\nu_0)(1-\nu_0)^3} \nu_1^3$$

$R(r)$ özel çözümü ise parametrelerin değişimi metoduyla aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$R(r) = P(r)U_1(r) + Q(r)U_2(r) \quad (25)$$

Burada;

$$U_1(r) = -\int_0^r \frac{Q(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi, \quad U_2(r) = \int_0^r \frac{P(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi,$$

$$f(r) = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \Omega^2 r \quad (26)$$

şeklinde dir.

Bu denklemlerde, $W(r)$ terimi Wronskian' dır. Buna göre $u(r) = C_1P(r) + C_2Q(r) + R(r)$ denklemi, gerilme-yerdeğiştirme ifadelerinde yerine yazıldığında ;

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1 \left(\frac{\nu P}{r} + \frac{dP}{dr} \right) + C_2 \left(\frac{\nu Q}{r} + \frac{dQ}{dr} \right) + \frac{\nu R}{r} + \frac{dR}{dr} \right]$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1 \left(\frac{P}{r} + \nu \frac{dP}{dr} \right) + C_2 \left(\frac{Q}{r} + \nu \frac{dQ}{dr} \right) + \frac{R}{r} + \nu \frac{dR}{dr} \right] \quad (27)$$

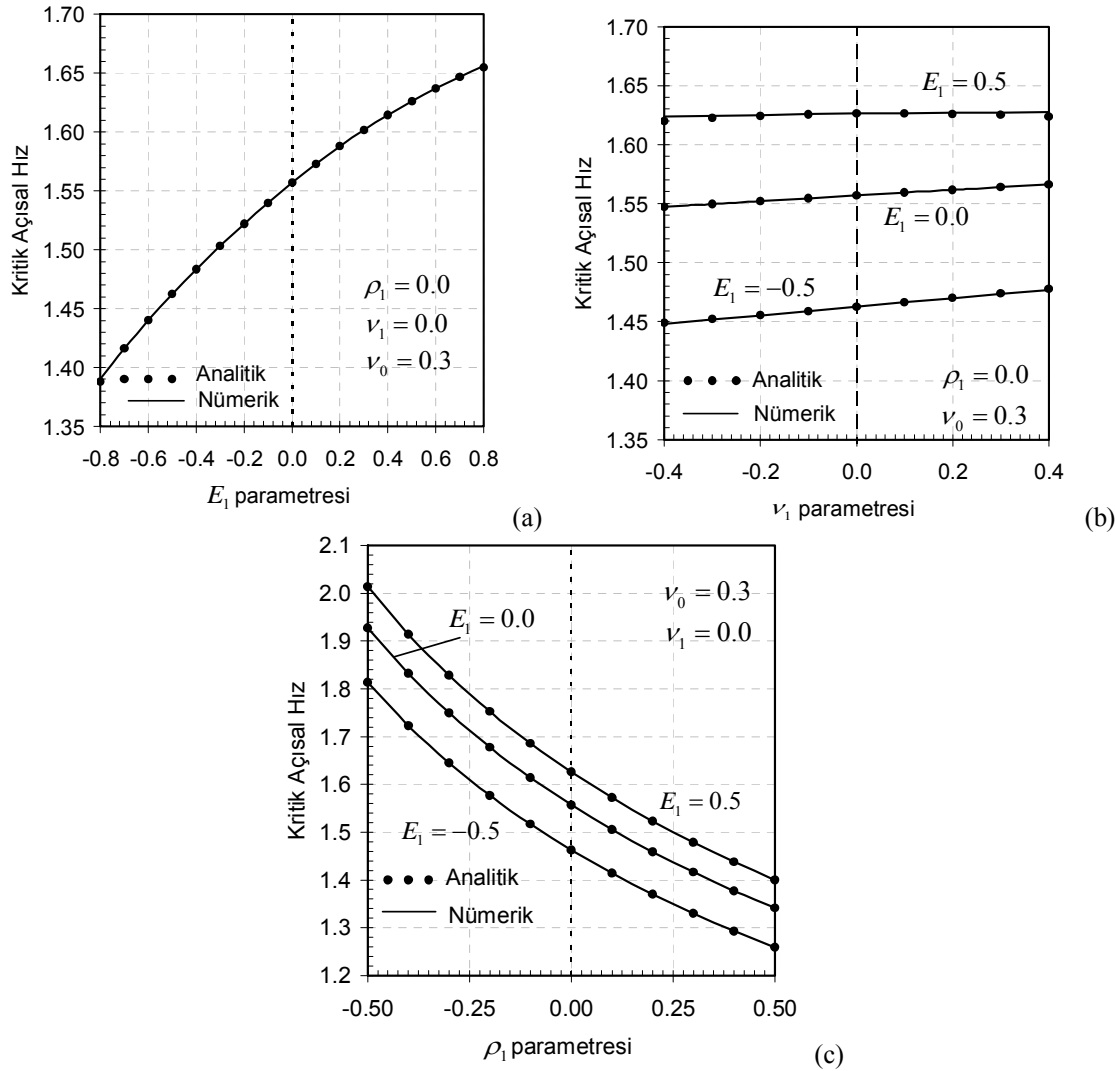
şeklinde elde edilir.

İçi dolu disk için sınır şartları şu şekildedir: Diskin merkezinde ($r=0$) gerilmeler sonludur ve disk serbest ucunda ($r=1$) ise gerilme yoktur, $\sigma_r(1) = 0$. İlk sınır şartından $C_2 = 0$ bulunur, ikinci sınır şartından ise;

$$C_1 = -\frac{\nu(1)R(1) + R'(1)}{\nu(1)P(1) + P'(1)} \quad (28)$$

şeklinde elde edilir.

Şekil 1'de malzeme özelliklerinin radyal koordinat boyunca lineer şekilde değiştiği dönen bir disk için plastik deformasyonun başladığı kritik açısal hızın malzeme parametreleriyle değişimi analitik ve sayısal olarak verilmiştir. Şekillere bakıldığında sayısal ve analitik sonuçların birbirleri ile uyum içinde oldukları görülmektedir. Seri çözüm yönteminde terim sayısı $i = 15$ alınmıştır.

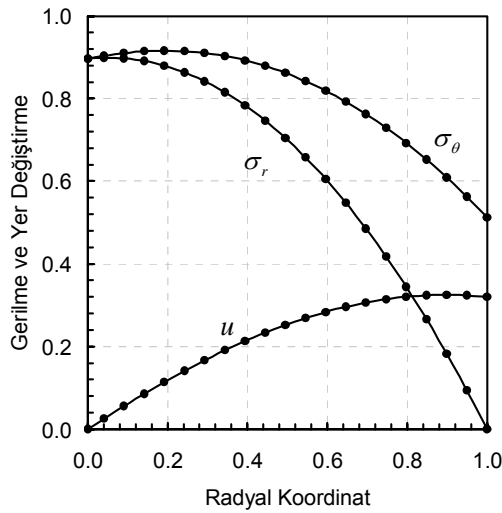


Şekil 1. Analitik ve sayısal sonuçların karşılaştırılması, a) Elastisite modülünün kritik hız etkisi, b) Poisson oranının kritik hız etkisi, c) Yoğunluğun kritik hız etkisi (Comparison of analytical and numerical results for effects of a) Modulus of elasticity on the critical velocity, b) Poisson's ratio on the critical velocity, c) density on the critical velocity)

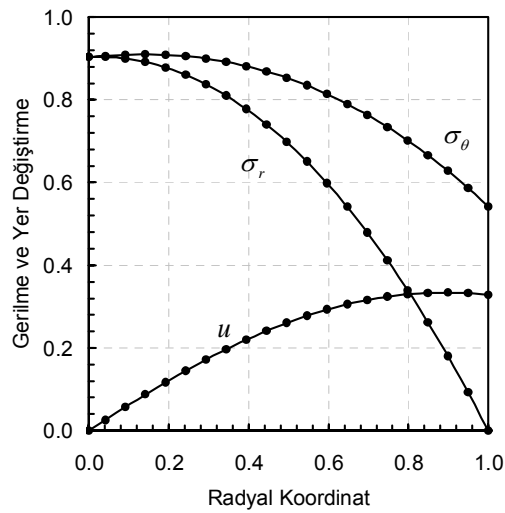
Şekil 2’de ise Eraslan ve Akış’ın [13] elastisite modülünün radyal koordinata bağlı olarak eksponansiyel (Şekil 2a) ve parabolik (Şekil 2b) olarak değiştiği içi dolu diskler için elde ettiği analitik sonuçlarla bu çalışmadaki sayısal hesaplamalı modelle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Elastisite modülü, Şekil 2a’ da $E(r) = E_0 e^{-n(r/b)^k}$ şeklinde, Şekil 2b’ de ise $E(r) = E_0 [1 - n(r/b)^k]$ şeklinde değişmektedir. Burada, E_0 elastisite modülünün referans değeri, n ve k malzeme sabitleri, r radyal koordinat, b ise disk yarıçapıdır. Şekilde yuvarlak olarak çizilen noktalar Eraslan ve Akış[13]’ in analitik sonuçlarıdır. Şekilden görüldüğü gibi analitik ve sayısal sonuçlar arasında mükemmel bir uyum vardır.

5. SAYISAL SONUÇLAR (NUMERICAL RESULTS)

Radyal koordinat boyunca mekanik özelliklerin

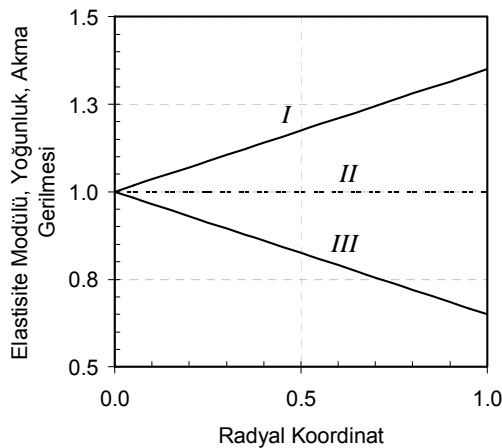


(a)

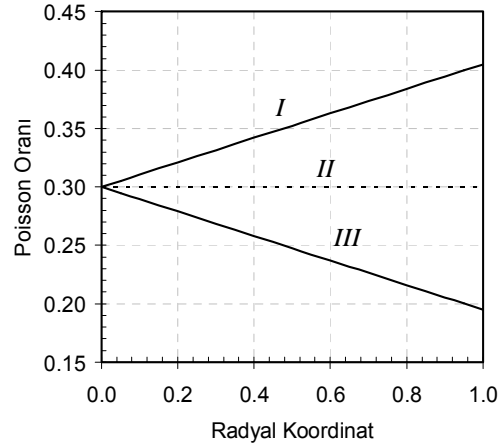


(b)

Şekil 2. Analitik ve sayısal sonuçların karşılaştırılması, a) Eksponansiyel çözüm ($n = -0.5$, $k = 1.3$), b) Parabolik çözüm ($n = -0.6$, $k = 1.1$) (Comparison of analytical and numerical results a) Exponential solution ($n = -0.5$, $k = 1.3$), b) Parabolic solution ($n = -0.6$, $k = 1.1$)



(a)



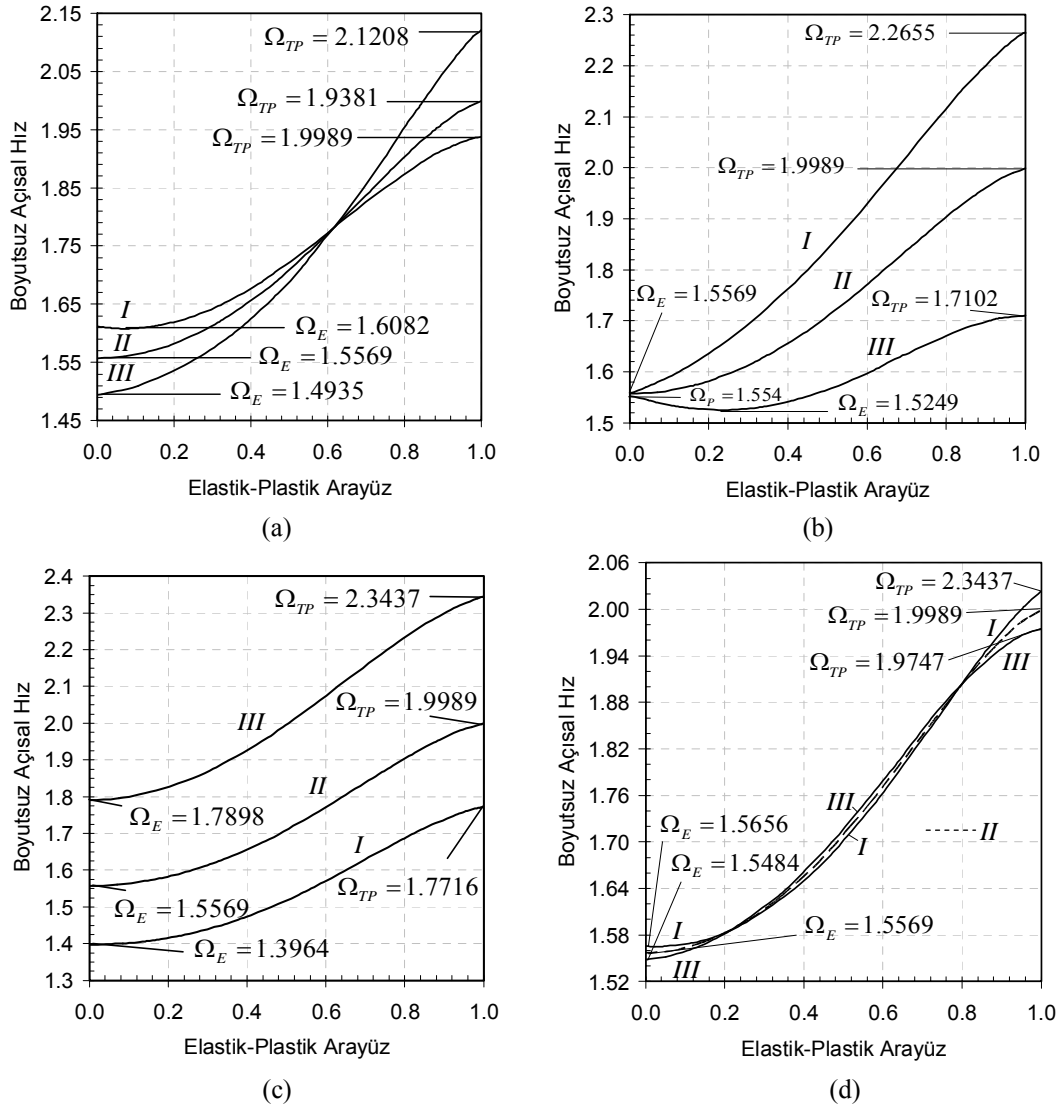
(b)

Şekil 3. Mekanik özelliklerin disk içinde değişimi a) Elastisite modülü, yoğunluk, limit akma gerilmesi, b) Poisson oranı (Variations of mechanical properties in the disk a) Modulus of elasticity, density, yield strength, b) Poisson's ratio)

değişiminin elastik-plastik deformasyon üzerine etkisini göstermek amacı ile parametrelerden birinin değeri değiştirilirken diğerleri sabit tutulmuştur. Bu değişim, parametrelerin disk merkezi $r = 0$ ’ dan disk ucu $r = 1$ ’ e doğru %35’ lik bir artış ve azalış olarak seçilmiştir ve Şekil 3’ de gösterilmiştir.

Şekil 4’de verilen grafiklerde parametre değerlerinin disk ucunda %35 arttığı (I), sabit kaldığı (II) ve %35 azaldığı (III) durum için elastik plastik arayüzün elastik limit açılma hız $\Omega = \Omega_E$ ’ den tam plastik limit açılma hız $\Omega = \Omega_{TP}$ ’ a kadar değişmesiyle ilerleyişi gösterilmiştir. Bu sonuçlar elde edilirken pekleşme parametreleri $H = 0.3$ ve $m = 1.2$ alınmıştır.

Şekil 4a’dan görüldüğü gibi II. durumda (homojen disk) ve III. durumda diskde akma merkezde



Şekil 4. Mekanik özelliklerin plastik bölgenin ilerleyişine etkisi a) Elastisite modülü etkisi, b) Limit akma gerilmesi etkisi, c) Yoğunluk etkisi, d) Poisson oranı etkisi (Effect of mechanical properties on propagation of plastic region a) Effect of modulus of elasticity, b) Effect of yield strength, c) Effect of density, d) Effect of Poisson's ratio)

başlamaktadır. *I.* durumda ise diskde akma $r = 0.07$ konumunda ve $\Omega_E = 1.6082$ olduğu hızda başlamaktadır ve hız arttıkça plastik bölge, disk merkezine ve disk ucuna doğru genişlemektedir. Plastik bölgenin disk ucuna *I.* disk için daha erken ulaştığı görülmektedir. Şekil 4b' de ise değişen limit akma gerilmesinin plastik defomasyona etkisi gösterilmiştir. Şekil 4a' daki durumun aksine akma, *I* ve *II* kompozisyonundaki diskler için merkezde başlamaktadır ve bu konumda ($r = 0$) disklerin limit akma gerilmeleri aynı değerde olduğundan akmanın başladığı açısız hız değerleri bu iki disk için aynıdır ($\Omega_E = 1.5569$). Buna karşılık *III* için akma, $\Omega_E = 1.5249$ açısız hızında ve $r = 0.2362$ konumunda başlamaktadır. Bu disk için plastik deformasyon bölgesi disk merkezine ($r = 0$), $\Omega_p = 1.554$ açısız hızında, disk ucuna ($r = 1$) ise

$\Omega_{TP} = 1.7102$ hızında ulaşmaktadır. *III.* disk için plastik bölgenin disk merkezine ulaştığı bu açısız hız değeri *I* ve *II* disklerinin limit açısız hız değerlerine çok yakındır fakat aynı değildir. Ayrıca *I* kompozisyonundaki disk içerisinde plastik deformasyon bölgesinin ilerleyişinin diğer durumdaki disklere göre daha yüksek açısız hız değerlerinde gerçekleştiği görülmektedir. Disk içerisinde nerede ve hangi açısız hız değerinde akmanın başlayacağı, akma kriteri tanımı gereğince σ_y / σ_0 değerinin disk içerisindeki dağılımı ile ilişkilidir. Bu grafiklerden, malzeme kompozisyonunun radyal koordinat boyunca değişiminin, disk içerisinde tüm gerilme bileşenleri dağılımını farklı şekilde etkilediği ve buna bağlı olarak da akma başlangıç hız ve konumunun farklı şekilde etkilendiği açıktır. Şekil 4c' de ise kütle yoğunluğunun plastik deformasyona etkisi verilmiştir. Merkezçil kuvvet, kütle ile orantılı olduğundan beklendiği gibi

kütle yoğunluğu azalan diskde akma için daha yüksek limit hızlara ulaşmak gerekmektedir. Şekil 4d' de ise değişen Poisson oranının etkisi verilmiştir. Poisson oranının değişiminin diğer parametrelerin değişimine göre etkisinin daha az olduğu görülmektedir.

Yukarıdaki parametrik analiz sonuçlarından yararlanarak E , σ_0 ve ν için disk dışına doğru artan, ρ içinse disk dışına doğru azalan değerlere sahip bir diskin elastik limit hızının yüksek olacağı görülmektedir. Buna göre iki farklı malzeme kompozisyonuna sahip diskin gerilme dağılımlarının karşılaştırılması amacıyla E , σ_0 , ρ ve ν değerlerinin radyal koordinat boyunca aşağıdaki gibi değiştiği kabul edilmiştir ve bu değişimler Şekil 5'de gösterilmiştir:

A diski için;

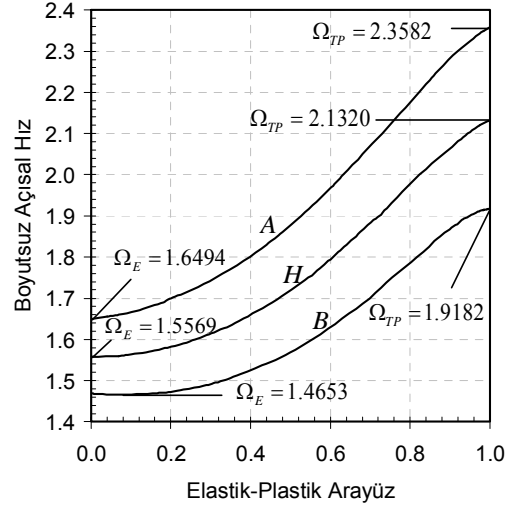
- E, σ_0 için $r=1$ ' de % 20 artış
- ν için $r=1$ ' de % 10 artış
- ρ için $r=1$ ' de % 10 azalış

B diski için;

- E, σ_0 için $r=1$ ' de % 20 azalış
- ν için $r=1$ ' de % 10 azalış
- ρ için $r=1$ ' de % 10 artış

Şekil 6'da malzeme özellikleri yukarıdaki gibi değişen A ve B disklerinde plastik deformasyon bölgelerinin açısal hızla ilerleyişi gösterilmiştir. Pekleşme parametreleri $H = 0.5$ ve $m = 0.8$ olarak alınmıştır. Şekilde H homojen diski temsil etmektedir. A ve H disklerinde akma merkezde başlarken, B diskinde akma $r = 0.0804$ konumunda ve $\Omega_E = 1.4653$ açısal hızında başlamaktadır. Şekilden görüldüğü gibi B diskinin tam plastik deformasyona ulaştığı $\Omega = 1.9182$ açısal hızında, A

ve H disklerinin bir bölümü halen elastik deformasyon etkisi altındadır.

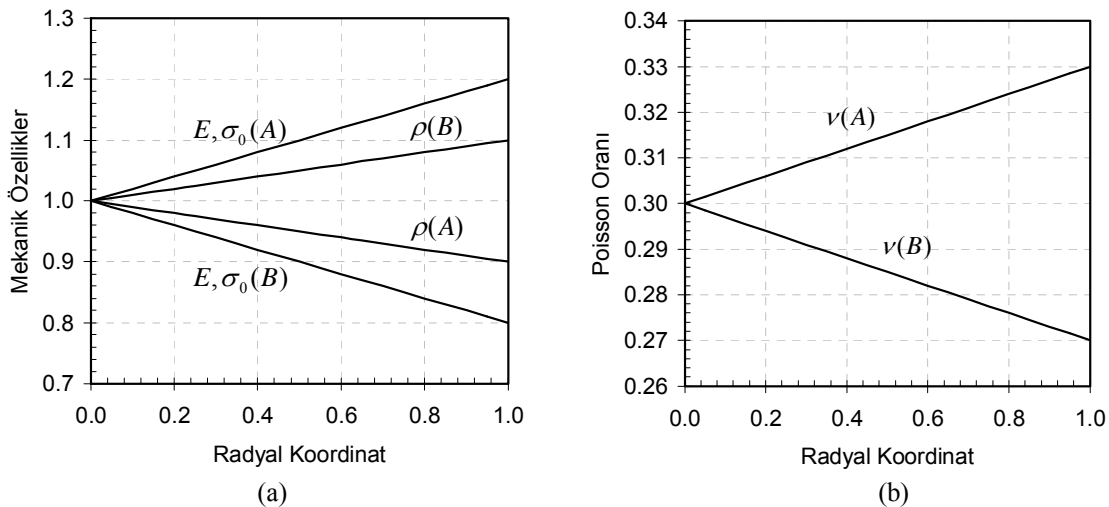


Şekil 6. A, B ve H disklerinde plastik bölgenin ilerleyişi, $H = 0.5$, $m = 0.8$ (Propagation of plastic region for disks A, B and H when $H = 0.5$, $m = 0.8$)

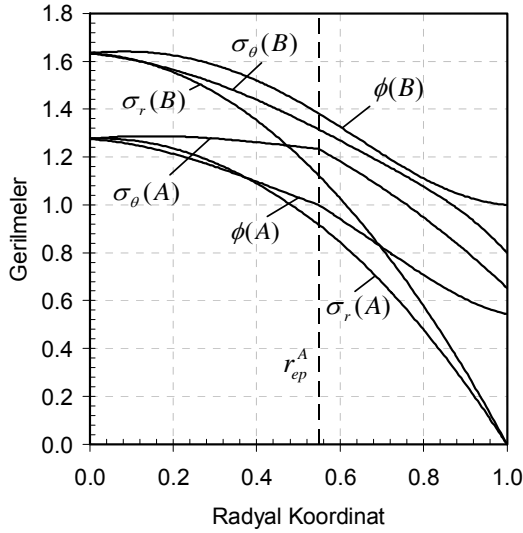
B diskinin tamamen plastik deformasyona maruz kaldığı $\Omega = 1.9182$ hızında A ve B disklerinde meydana gelen gerilme dağılımları ile A, B ve H disklerindeki plastik birim şekil değiştirmeler Şekil 7'de verilmiştir. Şekilde gösterilen ϕ , von Mises kriteriyle tanımlanan σ_y / σ_0 ifadesine eşittir, r_{ep} ise elastik-plastik arayüzü ifade etmektedir. $\phi = 1.0$ akmanın başlangıcını, $\phi > 1.0$ ise plastik deformasyon bölgesini ifade etmektedir.

6. SONUÇ (CONCLUDING REMARKS)

Bu çalışmada homojen olmayan içi dolu dönen bir diskin malzeme özelliklerinin tamamının ve disk geometrisinin radyal koordinat boyunca değişebildiği durum için elastoplastik gerilme analizinin sayısal



Şekil 5. A ve B disklerinin (a) Elastisite modülü, akma limiti ve yoğunluğunun, (b) Poisson oranının değişimi (Variations of (a) Modulus of elasticity, yield strength and density, (b) Poisson's ratio of the disks A and B)



Şekil 7. FDM ve homojen disklerde a) Gerilme dağılımlarının, b) Plastik birim şekil değiştirmelerin karşılaştırılması. $H = 0.5$, $m = 0.8$, $\Omega = 1.9182$ (Comparison of a) stresses, b) plastic strains in FGM and homogeneous disks for $H = 0.5$, $m = 0.8$, $\Omega = 1.9182$)

metodla çözümü yapılmıştır. Sonuçlar sabit kalınlıklı disk için elde edilmiştir. Malzeme parametrelerinin açılma hızına bağlı olarak elastik-plastik bölgenin genişlemesine etkileri ayrı ayrı elde edilmiştir. Parametrik analiz sonucunda mekanik dayanım için optimum malzeme özelliklerinin belirlenmesi sağlanmıştır. Örnek değerlerle seçilen iki farklı A ve B diskinin elastik-plastik gerilme dağılımı verilerek birbirlerine göre avantaj ve dezavantajları belirlenmiştir.

SEMBOLLER (NOMENCLATURE)

b	disk yarıçapı
h	disk kalınlığı
m	sertleşme parametresi
r	radyal koordinat
u	radyal yerdeğiştirme
E	elastisite modülü
H	boyutsuz pekleşme parametresi
$P(r), Q(r)$	diferansiyel denklemin homojen çözümleri
σ_i	gerilme bileşenleri
ε_i	birim şekil değiştirme bileşenleri
ρ	kütle yoğunluğu
ν	Poisson oranı
ω	açılma hızı
σ_Y, σ_0	akma gerilmesi, ilk akma gerilmesi
η	pekleşme parametresi
ε_{EQ}	eşdeğer birim şekil değiştirme
ε_i^p	plastik birim şekil değiştirme

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., **Theory of Elasticity**, 3rd Edition, McGraw Hill, New York, 1970.
2. Uğural, A.C. and Fenster, S.K., **Advanced Strength and Applied Elasticity**, 3rd Edition, Prentice Hall International, London, 1995.
3. Gamer, U., "Elastic-Plastic Deformation of the Rotating Solid Disk", **Ingenieur-Archiv**, 54, 345-354, 1984.
4. Gamer, U., "Stress Distribution in the Rotating Elastic-Plastic Disk", **ZAMM**, 65, 4, 136-137, 1985.
5. Eraslan, A.N. and Orcan, Y., "Elastic-Plastic Deformations of a Rotating Solid Disk of Exponentially Varying Thickness", **Mechanics of Materials**, 34, 423-432, 2002.
6. Orcan, Y. and Eraslan, A.N., "Elastic-Plastic Stresses in Linearly Hardening Rotating Solid Disks of Variable Thickness", **Mechanics Research Communications**, 29, 269-281, 2002.
7. Eraslan, A.N. and Orcan, Y., "On the Rotating Elastic-Plastic Solid Disks of Variable Thickness Having Concave Profiles", **International Journal of Mechanical Sciences**, 44, 1445-1466, 2002.
8. Güven, U., "Elastic-Plastic Stress Distribution in a Rotating Hyperbolic Disk With Rijid Inclusion", **International Journal of Mechanical Sciences**, 40, 97-109, 1998.
9. Eraslan, A.N. and Argeso, H., "Limit Angular Velocities of Variable Thickness Rotating Disks", **International Journal of Solids and Structures**, 39, 3109-3130, 2002.
10. Horgan, C.O. and Chan, A. M., "The Stress Response of Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Rotating Disks", **Journal of Elasticity**, 55, 219-230, 1999.
11. Güven, U., "Elastic-Plastic Stresses in a Rotating Annular Disk of Variable Thickness and Variable Density", **International Journal of Mechanical Sciences**, 34(2), 133-138, 1992.
12. Durodola JF and Attia O., "Deformation and Stresses in FG Rotating Disks", **Compos. Sci. Technol.**, 60, 987-995, 2000.
13. Eraslan, A.N. and Akış, T., "On the Plane Strain and Plane Stress Solutions of Functionally Graded Rotating Solid Shaft and Solid Disk Problems", **Acta Mechanica**, 181, 43-63, 2006.
14. Mendelson, A., **Plasticity: Theory and Applications**, Collier-Macmillan, New York, London, 1968.
15. Brown, P.N. and Hindmarsh, A.C., "Reduced Storage Matrix Methods in Stiff ODE Systems", **Applied Mathematics and Computation**, 31, 40-91, 1989.
16. Garvan, F., **The Mapple Book**, Chapman and Hall/CCR, 2002.