Gazi Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi 14/2 (2012). 1-18

İKİ BOYUTLU ARŞİMEDYEN KAPULALARDA İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI VE BİR UYGULAMA

Öğr. Gör. Sıddık ARSLAN* Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU**

Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK***

Öz:

Kapulalar bağımlılık yapılarının incelenmesi ve modellenmesinde yaygın olarak kullanılan elverişli bir araç haline gelmiştir. Arşimedyen kapula aileleri, aile parametresine bağlı olarak bağımlılık yapısını belirlememize imkân vermektedir. Bu çalışmada iki değişkenli Arşimedyen kapulaların temel özellikleri incelenerek, aile parametresini tahmin etmek için Kendall'ın τ'suna dayalı parametrik olmayan bir yöntem üzerinde durularak, gerçek bir veri kümesi üzerinde uygulama yapılmıştır. Çalışmada 03.02.2003 – 17.10.2008 yılları arasındaki Dolar kuru ve Avro kuru verilerine ait 1489 gözlem kullanılarak bu iki değişken arasındaki ilişki modellenmeye çalışılmıştır. Yine, çalışmada iki boyutlu Arşimedyen kapulalar için parametrik olmayan bir tahmin yöntemi finansal verilere dayalı uygulama ile birlikte verilmiştir. Çalışma bulgularına göre; iki boyutlu Arşimedyen kapulaların tahmin açısından elverişli bir yöntem olduğu tespit edilmekle birlikte, tahmin işlemi sürecine Lamda fonksiyonu veya $K(v)$'nin dâhil edilmesi bir bütün olarak finansal verilerden hareketle yapılacak tahminlerin kalitesini artıracağı bir örnekle ortaya konulmuştur. Ayrıca deneysel lamda fonksiyonu, deneysel lamda fonksiyonunun %95 güven aralığı ve uygulanan üç Arşimedyen kapula ailesi için teorik lamda fonksiyonu grafikleri geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kapula, Arşimeyan kapula, bağımlılık yapısı, döviz kurları, parametrik olmayan tahmin yöntemi

* Öğr. Gör., Gazi Üniversitesi, Bankacılık ve Sigortacılık Yüksekokulu, Bankacılık Bölümü, sarslan@gazi.edu.tr

** Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, scelebi@gazi.edu.tr

*** Prof.Dr., Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, ozturk@science.ankara.edu.tr

STATISTICAL INFERENCES IN TWO DIMENSIONAL ARCHIMEDEAN COPULAS: A CASE STUDY

Abstract:

Copulas, has become widely used and useful tool in exploring dependences structure and modeling. Archimedean copula families, allow us to determine dependence structure based on the family parameters. In this study, the major characteristics of the bivariate Archimedean copulas has been explored and to forecast its family parameters, a nonparametric based method of Kendall's τ has been utilized together with real data set application from financial institutions Furthermore, the method will be tested and results have been discussed. Also, USD and Euro daily Exchange rates data for the period of Feb. 03, 2007 – Oct.17, 2008 , total of 1489 data points has been used to model the relationship between these two variables. Further, non-parametric forecasting method together with its applications for the two dimensional Archimedean copulas has been applied. The study revealed that, although two dimensional Archimedean copulas have been proved to be an important forecasting methodology, but including Lambda function or $K(v)$' in the process of forecasting has found to be strengthen the quality of forecasting. Besides, experimental Lambda function, at 95% confidence interval and theoretical lambda functions applied for the three Archimedean copula families has been drawn.

Keywords: Copula, Archimedian copula, dependence structure, exchange rates, non-parametric forecasting.

GİRİŞ

Arşimedyen kapulalar; kolay inşa edilebilmeleri, bir kapula ailesinin çeşitli bağımlılık özelliklerini modelleyebilmesi ve çok değişkenli genişlemelerinin elverişli olması gibi nedenlerden dolayı uygulamada sıkça kullanılmaktadır.

Kapulalar kullanılarak bağımlılık yapısının incelenmesi başta finansal veriler olmak üzere birçok alanda uygulanmıştır. Kapulaların marjinal dağılım fonksiyonlarından bağımsız olması, yöntemin uygulama alanını genişletmektedir. Bağımlılık yapıları ile ilgili kanıtlamalı istatistik çalışmalarının üretici fonksiyonlar üzerinden yapılabilmesi Arşimedyen kapulaların önemli ve güçlü yönlerindendir.

I) ARŞİMEDYEN KAPULA

Tanım I.1 Aşağıdaki özellikleri sağlayan $C : I^2 \rightarrow I$ fonksiyonuna iki boyutlu kapula denir.

1. Her $u, v \in I$ için

i. $C(u,0) = C(0,v) = 0$ ii. $C(u,1) = u$ $C(1,v) = v$ dir.

2. $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ olacak şekilde her $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ için

$C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0$ dır (Nelsen (1999)).

Tanım I.2 $\varphi : I \rightarrow [0,\infty]$ sürekli, kesin azalan ve $\varphi(1) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Tanım kümesi $[0,\infty]$, değer kümesi I olan ve

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

ile verilen fonksiyona φ ’nin genelleştirilmiş ters fonksiyonu denir.

Burada ters fonksiyonun tanımı da kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\varphi\left(\varphi^{[-1]}(t)\right) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} = \min(t, \varphi(0))$$

Eğer $\varphi(0) = \infty$ ise $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ olarak genelleştirilmiş ters fonksiyon, ters fonksiyona eşit olur.

Tanım I.3 $\varphi : I \to [0,\infty]$ sürekli, kesin azalan, konveks ve $\varphi(1)=0$ olacak şekilde bir fonksiyon ve $\varphi^{[-1]}$, φ'nin genelleştirilmiş ters fonksiyonu olsun.

$$C(u,v)=\varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(v)) \tag{1}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon bir kapuladır. Bu kapulaya Arşimedyen kapula denir. φ fonksiyonuna da kapulanın üreticisi denir. $\varphi(0)=\infty$ ise φ'ye tam üretici denir. Bu durumda $\varphi^{[-1]}=\varphi^{-1}$'dir ve (1) kapulasına tam Arşimedyen kapula denir (Nelsen,1999: 48-53).

Teorem I.1 C üreticisi φ olan Arşimedyen bir kapula olsun. O zaman;

a. C simetriktir; yani her $u,v \in I$ için $C(u,v)=C(v,u)$'dur.

b. C birleşmelidir; yani her $u,v,w \in I$ için $C(C(u,v),w)=C(u,C(v,w))$'dir.

c. Eğer $c>0$ herhangi bir sabitse, $c.\varphi$ de C'nin üreticisidir. (Nelsen,1999: 48-53)

Tanım I.4 Herhangi bir kapula için $\delta_C(u)=C(u,u)$ eşitliği ile fonksiyona kapulanın köşegen kesiti denir.

Verilen bir kapulanın Arşimedyen kapula olup olmadığını belirlemenin yöntemlerinden birisi aşağıdaki teoremde verilen köşegen kesiti ölçütüdür.

Teorem I.2 C; her $u \in (0,1)$ için $\delta_C(u)<u$ olacak şekilde birleşmeli bir kapula olsun. O zaman C Arşimedyen'dir (Nelsen,1999: 58).

Tablo:1

Bu Çalışmada Kullanılan Arşimedyen Kapula Aileleri

Aile	φ	*Parametre aralığı* ($\theta \in$)	λ	τ
Clayton	$\frac{1}{\theta}\left(t^{-\theta}-1\right)$	$\left[-1,\infty\right)-\{0\}$	$-\frac{t\left(1-t^{\theta}\right)}{\theta}$	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Frank	$-\ln\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$	$\left(-\infty,\infty\right)-\{0\}$	$-\frac{1-e^{-\theta t}}{\theta e^{-\theta t}}\ln\frac{1-e^{-\theta}}{1-e^{-\theta t}}$	$1+\frac{4\left(D_1(\theta)-1\right)}{\theta}$ [a]
Gumbel	$\left(-\ln t\right)^{\theta}$	$\left[1,\infty\right)$	$\frac{t\ln t}{\theta}$	$\frac{\theta-1}{\theta}$

[a] D_1, 1. Dereceden Debye fonksiyonunu göstermektedir: $D_1(\theta)=\int_0^{\theta}\frac{t}{\theta}\left(e^{t}-1\right)dt$

II) ARŞİMEDYEN KAPULALARDA TAHMİN ÇALIŞMALARI

Arşimedyen kapulaların tahmini birçok yöntemle gerçekleştirilmektedir. Burada yaygın olarak kullanılanlara değinilecektir. (Kim, Silvapulle ve Silvapulle, 2007: 2836-2850) çalışmalarında parametrik ve yarı parametrik tahmin yöntemlerinden En Çok Olabilirlik (Maximum Likelihood Estimator-MLE), Sözde En Çok Olabilirlik Fonksiyonu (Pseudo Maximum Likelihood Estimator-PMLE) ve Marjinallere İlişkin Çıkarsama (Inference Function for Margins-IFM) yöntemlerini karşılaştırmışlar ve aşağıdaki sonuçlara ulaşmışlardır.

a. IFM ve MLE tahminleri marjinal dağılımların yanlış belirlenmesi halinde sağlam (robust) değildirler.

b. PMLE yöntemi kavramsal olarak hemen hemen IFM yöntemiyle aynıdır, ancak marjinal dağılımların yanlış belirlenmesi durumunda ortaya çıkan sağlam (robust) olmama sorununu halleder.

c. İstatistiksel hesaplamalar ve veri analizi bakımından, PMLE tahmini IFM tahmini gibi hesaplanması kolaydır.

d. PMLE yöntemini kullanmakla, IFM'yi kullanarak kazanılan önemli istatistiksel anlayışlardan herhangi biri kaybedilmez. PMLE'nin IFM'ye göre avantajı, PMLE'nin marjinal dağılımları açıkça modellemeyi gerektirmemesidir.

e. Yapılan simülasyon çalışmaları sonucunda PMLE tahmininin uygulamada karşılaşılan durumların çoğunda MLE ve IFM tahminlerinden daha iyi olduğu gözlenmiştir.

Dolayısıyla (Kim vd. 2007: 2836-2850), PMLE yönteminin MLE ve IFM yöntemine tercih edilmesi gerektiği sonucuna ulaşmışlardır.

(ALHAN,2008: 1-8) çalışmasında (Genest and Rivest, 1993: 1034-1043)'de de geçen Kendall τ değerine dayanan yöntemi, İMKB Tüm Firmalar, Ulusal-100, Ulusal-Hizmetler, Ulusal-Mali, Ulusal-Sınai endeksleri arasındaki bağımlılık yapılarını incelemekte kullanmıştır.

(ÖZBAKIŞ, 2006: 1-3) Yüksek lisans tez çalışmasında kapula tahmin yöntemlerini parametrik yöntemler, yarı parametrik yöntemler ve parametrik olmayan yöntemler şeklinde üç sınıfta değerlendirmiştir. Parametrik yöntemler olarak; En çok olabilirlik yöntemi, IFM yöntemini, Yarı parametrik yöntem olarak Sözde en çok olabilirlik yöntemini ve Parametrik olmayan yöntemler olarak da Kendall'ın To'suna dayanan yöntem ve Spearman'ın ro'suna dayanan yöntemleri incelemiştir. Çalışmada kullanılan yöntemlerin Finansal veriler üzerinde bir uygulaması yapılmıştır.

(ÇELEBİOĞLU, 2003: 223-256) İki boyutlu Arşimedyen kapulalarda parametrik olmayan tahmin yöntemini ve Arşimedyen kapulalarda yeni gelişmeleri sunduğu çalışmasında, yöntemi öğrencilerin ara ve final sınav notlarının bağımlılık yapısının incelenmesine uygulamıştır.

(D. S. DİMİTROVA vd, 2008: 3570-3582) Çok değişkenli Arşimedyen kapulalarda tahmin çalışmalarında Geometrik olarak tasarlanmış çizgiler (GeD Splines) ismini verdikleri bir yöntem önermişlerdir. GeD Splines yöntemi; Arşimedyen kapulalarda Kendall dağılımının tahmini için üç adımdan oluşan bir yöntem önermektedir. Çalışmada tahmin yöntemi için 2, 3 ve 4 boyutlu Clayton ve Frank kapulalarında simülâsyon çalışması yapılarak sonuçları tartışılmıştır.

(C. GENEST vd, 2011: 223-256) çalışmalarında rank tabanlı yeni bir tahmin yöntemi önermektedir. Yöntem d boyutlu bir rastgele değişkeni; yine d boyutlu simpleks dağılımlı bir değişken ve bir radyal değişken ile karakterize etmektedir. Çalışmada, kapula dönüşümünün dağılımını (Kendall dağılımı) radyal değişken türünden ifade ederek tahmin yöntemi geliştirilmektedir. Çalışmada ayrıca Arşimedyen kapula ile Kendall dağılımı arasında bire bir bağıntı olduğu gösterilmektedir. Yöntem 2, 3 ve 5 boyutlu durumlarda, Clayton, Gumbel ve Frank kapulaları için ayrı ayrı simülâsyon çalışması ile sınanmıştır.

Genelde varlık fiyatlama modellerinin test edilmesi, gelecekteki çok sayıda temel göstergelere yönelik beklentiler tarafından belirlenmesi nedeniyle oldukça zordur. Çünkü beklentileri ölçmek zordur. 1970'ler sonrası döviz kurunun hareketlerini tahmin etmede kullanılan modeller, döviz kurlarını "varlık" olarak ele almışlar ve bu nedenle beklentilerin döviz kuru hareketlerindeki rolünü ön plana çıkaran bugünkü değer modellerini göz ardı etmişlerdir. (Engel, 2006: 1) yaptığı çalışmada bu boyutu dikkate alarak kur hareketlerini tahmin etmeyi test etmiştir.

Diğer taraftan (Lee ve Long, 2006:1-30) üç döviz kurunun tahmininde bağımlı rastgele değişkenlerin doğrusal kombinasyonu ile türetilen korelâsyonsuz bağımlı hata terimlerini kapsayan eliptik olmayan dağılıma sahip finansal getirilerin tahmininde kullanılan modellerden; Copula MGARCH modelini geliştirmiş ve uygulamışlardır. Çalışmada ulaşılan sonuçlar, C- MGARCH modelinin daha önce geliştirilen modellerden; (Engel R.,2002:339-350) Dinamik koşullu korelasyon DCC modeli, (Tse ve Tsui, 2002: 351-362) değişken korelasyon modeli (VC) ve (Engel ve Kroner, 1995: 122-150.) BEKK modelinden daha yüksek performans göstermiştir. Çalışmanın bulgularına göre kapula fonksiyonu seçimi oynaklık (volatilite) seçiminden daha önemli olduğu ortaya çıkmıştır.

(Patton, 2008: 767-786)'e göre çok değişkenli yoğunlukların parametrik kapulalarla modellenmesi ve tahmin edilmesi giderek artan bir kullanım alanı bulmaktadır. Parametrik kapulaların avantajı çok değişkenli rastgele değişkenler arasındaki farklı bağımlılık yapılarını yansıtabilmesi (karakterize edebilmesi)dir. Nitekim (Li ve Xu, 2009: 1) Hansen SPA test metodolojisini kullanarak kapula tabanlı çok değişkenli yoğunluk tahminlerini karşılaştırmış, sonuçta, Frank kapula ailesinin çoğu durumda diğer modellerden daha başarılı olduğunu tespit etmiştir.

III) İKİ BOYUTLU ARŞİMEDYEN KAPULALARDA TAHMİN

Aşağıda sunulan teorem Arşimedyen kapulalarda tek değişkenli dönüşümlerin stokastik özelliklerini karakterize etmektedir. (Genest ve Rivest, 1993: 1034-1043).

Teorem III.1 X ve Y; kapulası C, üretici fonksiyonu φ olan düzgün rastgele değişkenler ve $U = \dfrac{\varphi(X)}{\varphi(X)+\varphi(Y)}$, $V = C(X,Y)$, $\lambda(v) = \dfrac{\varphi(v)}{\varphi'(v)}$ olsun. Bu durumda;

a) U , $(0,1)$ aralığı üzerinde düzgün dağılımlıdır.

b) V 'nin dağılım fonksiyonu $K(v) = v - \lambda(v)$'dir.

c) U ve V bağımsız rastgele değişkenlerdir.

λ fonksiyonunun tanımından

$$\varphi(v) = \exp\left\{\int_{v_0}^{v} \frac{1}{\lambda(t)}dt\right\}$$

(1)

yazılabilir. Burada $v_0 \in (0,1)$ keyfi bir sabittir.

Bu çalışmada V'nin dağılım fonksiyonu $K(v)$, X ve Y değişkenlerinin kapulasının dolaylı yöntemle tahmin edilmesinde kullanılacaktır.

İzleyen teorem Arşimedyen kapulalarda Kendall dağılımı ile üretici fonksiyon arasındaki bağıntıyı vermektedir (Genest ve Rivest, 1993: 1034-1043).

Teorem III.2 X ve Y; kapulası C olan düzgün rastgele değişkenler olsun. $0 \le v \le 1$ için $K(v) = \Pr(C(X,Y) \le v)$ alalım ve $K(v^-)$'yi; $K(v^-) = \lim_{t \uparrow v} K(t)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda (1) ile tanımlanan $\varphi(v)$ fonksiyonu ancak ve ancak, v'nin $(0,1)$ aralığındaki her değeri için $K(v^-) > v$ oluyor ise konveks, azalan ve $\varphi(1) = 0$ 'dır.

IV) $H(X,Y)$ İÇİN PARAMETRİK OLMAYAN TAHMİN YÖNTEMİ

$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$; ortak dağılım fonksiyonu $H_n(X_i,Y_i)$, marjinal dağılım fonksiyonları sırasıyla sürekli $F(X)$ ve $G(Y)$ ve kapulası $C(x,y)$ olan bir rastgele örneklem olsun. Ayrıca C'nin Arşimedyen olduğu varsayımı altında tahmin yapılmak istenirse; yukarıda verilen teoreme göre Arşimedyen kapulalar $V = H(X,Y)$ fonksiyonunun stokastik davranışı ile karakterize edilebilir. Bu bölümde aşağıda verilen işlem basamakları uygulanarak tahmin yapılacaktır.

1. $H_n(X_i,Y_i)$'nin örneklemdeki gözlemlerden (X_i,Y_i)'den küçük olanların oranının temsili olduğu göz önüne alınırsa bu oranı

$$V_i = \#\{(X_j,Y_j): X_j < X_i, Y_j < Y_i\}/(n-1) \qquad 1 \le i \le n$$

(1) ile ifade edebiliriz. Burada #, kümenin kardinalitesini göstermektedir.

2. $\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$ olmak üzere $K_n(v)$ deneysel dağılımı

$$K_n(v) = \sum_{i=1}^{n} \delta(v - V_i)/n$$

kullanılarak elde edilir.

3. deneysel lamda fonksiyonu $\lambda_n(v) = v - K_n(v)$ eşitliği kullanılarak elde edilir.

4. (1) eşitliğindeki V_i'ler kullanılarak Kendall'ın τ'su

$$\tau_n = 4\overline{V} - 1$$

şeklinde elde edilir.

Bu çalışmada Tablo: 1'de verilen Arşimedyen kapula ailelerine uyum test edilecektir. Bunun için tahmin edilen Kendall'ın τ'su kullanılarak her bir aile için beklenen değerler tablosu elde edilecektir. Daha sonra gözlenen değerler ile beklenen değerlerin uyumu ki-kare ile test edilecektir.

İzleyen teorem Arşimedyen kapulalarda Kendall dağılımının tahmin edicisinin ampirik özelliğini vermektedir. (Genest ve Rivest, 1993: 1034-1043).

Teorem IV.1. $C(x,y)$ Lebesgue ölçüsüne göre mutlak sürekli kapula ve $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$; C'den rastgele bir örneklem olsun. Zayıf düzgünlük koşulu altında V_i'lerin dağılımı $K(v)=\Pr(C(X,Y)\leq v)$'ye yakınsar. V_i'lerin deneysel dağılım fonksiyonu $K_n(v)$, $K(v)$'nin $\sqrt{n}-$ tutarlı tahmin edicisidir. $K_n(v)$'nin bir $o(1/n)$ yakınsak asimptotik varyansı aşağıdaki gibidir.

$$\frac{K(v)\overline{K}(v)+k(v)\left[k(v)R(v)-2v\overline{K}(v)\right]}{n}.$$

Burada $\overline{K}(v)=1-K(v)$ ve $k(v)=K'(v)$, $V=C(X,Y)$'nin yoğunluğu olarak kabul edilir. Ayrıca

$$R(v)=E\left[C\{\min(X_1,X_2),\min(Y_1,Y_2)\}-v^2\,\middle|\,C(X_1,Y_1)=C(X_1,Y_1)=v\right]$$

dir. Arşimedyen kapulalar için

$$R(v)=2\int_0^1(1-t)\varphi^{-1}((1+t)\varphi(t))dt-v^2$$

dir. Özel olarak Clayton ailesi için

$$R(v)=\frac{2\theta v}{(1-\theta)(1-2\theta)(1-v^\theta)^2}\left[\theta\left(2-v^\theta\right)^{2-1/\theta}+\left(1-v^\theta\right)(1-2\theta)-\theta\right]-v^2$$

dir.

V) DÖVİZ KURU VERİSİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA

Bu çalışmada 03.02.2003 – 17.10.2008 yılları arasındaki Dolar kuru ve Avro kuru verilerine ait 1489 gözlem kullanılarak bu iki değişken arasındaki ilişki modellenmeye çalışılmıştır. Bu değişkenlere ait açıklayıcı istatistikler Tablo:2'de verilmiştir. Ayrıca değişkenlere ait çapraz tablolar Tablo:3'de verilmiştir. Değişkenler için saçılım grafikleri ve marjinal histogramları Şekil:1'de gösterilmiştir.

Ayrıca λ_n fonksiyonu için %95 güven aralığı Teorem 3.3'te verilen asimptotik varyans kullanılarak hesaplanmıştır.

Tablo:2

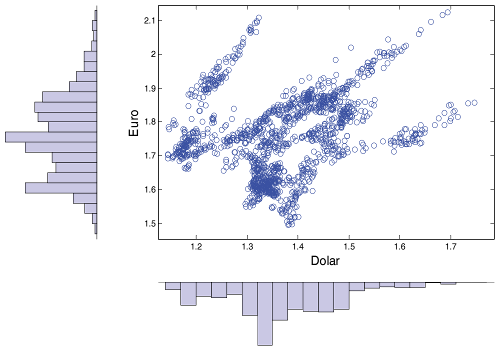
Dolar ve Euro İçin Açıklayıcı İstatistikler

	N	*Min.*	*Maks.*	*Ort.*	*Std. Sap*	*Çarp.(Std. Ht.)*	*Bask. (Std. Ht.)*
DOLAR	1489	1,14	1,75	1,3701	0,11243	0,344 (0,063)	0,114 (0,127)
AVRO	1489	1,50	2,12	1,7567	0,11721	0,249 (0,063)	-0,341 (0,127)

Tablo :3

Dolar ve Euro Veri Kümesi İçin Gözlenen Ortak Frekans Dağılımı

	Dolar için hücre üst sınırları								
Avro için hücre üst sınırları		$Y_{(212)}$	$Y_{(425)}$	$Y_{(638)}$	$Y_{(850)}$	$Y_{(1064)}$	$Y_{(1277)}$	$Y_{(1489)}$	
	$X_{(212)}$	0	6	89	38	25	9	45	212
	$X_{(425)}$	32	32	28	52	18	1	50	213
	$X_{(638)}$	75	67	20	12	34	1	4	213
	$X_{(850)}$	60	68	18	23	21	20	2	212
	$X_{(1064)}$	45	33	6	20	28	62	19	213
	$X_{(1277)}$	0	7	31	28	35	87	25	213
	$X_{(1489)}$	0	0	21	39	53	33	67	213
		212	213	213	212	214	213	212	1489



Şekil:1

Dolar - Avro Verisine Ait Saçılım Grafiği

Değişkenlerin ikili ilişkilerini modellemek için Tablo:1'de verilen kapula aileleri kullanılmıştır. Değişkenlere ait hesaplanan Kendall'ın τ'su için karşılık gelen parametre değerleri, verilere uyumluluk düzeyi için hesaplanan Ki-Kare istatistiği değerleri Tablo 4'de verilmiştir. Hesaplanan Ki-Kare istatistiğine göre bu iki değişken arasındaki ilişki yapısı için, incelenen üç aile arasında en uygun olan ailenin Gumbel ailesi olduğu görülmektedir.

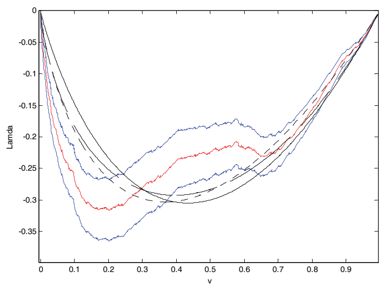
Gumbel ailesi için Kendall'ın τ'sunun teorik değeri, parametresi cinsinden incelendiğinde bu ailenin diğer ailelerden farklı olarak sadece pozitif bağımlılık yapısını modellediği görülmektedir. Buradan Türkiye için Dolar ve Avro arasındaki bağımlılık yapısının daima pozitif yapıda olacağı, yani bu iki değişken arasında pozitif uyumluluk olacağı sonucu çıkarılabilir.

Ayrıca deneysel lamda fonksiyonu, deneysel lamda fonksiyonunun %95 güven aralığı ve uygulanan üç Arşimedyen kapula ailesi için teorik lamda fonksiyonu grafikleri Şekil:2'de gösterilmiştir. Lamda fonksiyonun %95 güven aralığı elde edilirken Teorem 5 kullanılmıştır

Tablo: 4

İncelenen Kapula Aileieri İçin Uyum İyiliği Testi Sonuçları

Aile	θ	X^2	*sd*	$X^2_{tab,35,.95}$	$X^2_{tab,35,.99}$
Clayton	0,4254	27,11	35	49,80	57,34
Frank	1,6193	24,35	35	49,80	57,34
Gumbel	1,2127	22,65	35	49,80	57,34



Şekil:2

Değişkenler için lamda fonksiyonu grafikleri; kırmızı grafik deneysel lamda fonksiyonunu, mavi grafikler deneysel lamda fonksiyonu için %95 güven aralığını, ___ Clayton, --- Frank ve ….. Gumbel ailesi için teorik lamda fonksiyonunun grafiğini göstermektedir.

Tablo:5

Dolar ve Avro Veri Kümesi İçin Veri Kümesi İçin Beklenen Ortak Frekans Dağılımı

		Dolar için hücre üst sınırları						
		$Y_{(212)}$	$Y_{(425)}$	$Y_{(638)}$	$Y_{(850)}$	$Y_{(1064)}$	$Y_{(1277)}$	$Y_{(1489)}$
Avro için hücre üst sınırları (Clayton)	$X_{(212)}$	74	39	28	22	19	16	14
	$X_{(425)}$	39	37	33	30	27	25	23
	$X_{(638)}$	28	33	32	31	30	29	28
	$X_{(850)}$	22	30	31	32	32	33	32
	$X_{(1064)}$	19	27	30	32	34	35	35
	$X_{(1277)}$	16	25	29	33	35	37	38
	$X_{(1489)}$	14	23	28	32	35	38	41
Avro için hücre üst sınırları (Frank)	$X_{(212)}$	50	42	35	28	23	19	15
	$X_{(425)}$	42	39	35	30	26	22	19
	$X_{(638)}$	35	35	33	32	29	26	23
	$X_{(850)}$	28	30	32	32	31	30	29
	$X_{(1064)}$	23	26	29	31	33	34	35
	$X_{(1277)}$	19	22	26	30	34	39	42
	$X_{(1489)}$	15	19	23	29	35	42	50
Avro için hücre üst sınırları (Gumbel)	$X_{(212)}$	47	39	34	30	26	21	15
	$X_{(425)}$	39	37	34	32	29	25	18
	$X_{(638)}$	34	34	34	33	30	27	20
	$X_{(850)}$	30	32	33	33	32	30	24
	$X_{(1064)}$	26	29	30	32	33	34	28
	$X_{(1277)}$	21	25	27	30	34	38	38
	$X_{(1489)}$	15	18	20	24	28	38	70

SONUÇ

Bu çalışmada iki boyutlu Arşimedyen kapulalar için parametrik olmayan bir tahmin yöntemi finansal verilere dayalı uygulama ile birlikte verilmiştir. Çalışma bulgularına göre; iki boyutlu Arşimedyen kapulaların tahmin açısından önemli bir yöntem olduğu tespit edilmekle birlikte, tahmin işlemi sürecine Lamda fonksiyonu veya $K(v)$'nin dâhil edilmesi bir bütün olarak finansal verilerden hareketle yapılacak tahminlerin kalitesini artıracağı bir örnekle ortaya konulmuştur.

Ulaşılan bir diğer sonuç ise, Türkiye için Dolar ve Avro arasındaki bağımlılık yapısının daima pozitif yapıda olacağı, yani bu iki değişken arasında pozitif uyumluluk olacağı şeklinde ortaya çıkmıştır.

Herhangi bir, iki boyutlu Arşimedyen kapulada, üretici fonksiyonu tam olmasa da Kendall dağılım fonksiyonları aynı olan kapulaların kendileri aynıdır [Genest vd. 2011]. Buna göre ilgilenilen Arşimedyen kapula ailesi için, teorik Kendall dağılım fonksiyonu ile örneklemden elde edilen deneysel Kendall dağılım fonksiyonunun uyumluluğu test edilebilir. Böylece dolaylı olarak kapulanın dağılımına uyumluluk da incelenmiş olacaktır. Dolar ve Avro kuru üzerinde uygulanan analizin sonuçları bu şekilde incelemenin, istatistiksel sonuç çıkarım yöntemini daha güçlü kılacağını ortaya çıkarmıştır.

KAYNAKÇA

ALHAN, Aslıhan, (2008), **“**Bağımsızlık Kapulasını İçeren Kapula Aileleri, Kapula Tahmin Yöntemleri Ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında Sektörler Arası Bağımlılık Yapısı”, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi. ANKARA.

ÇELEBİOĞLU, Salih, (2003). “Arşimedyen Kapulalar ve Bir Uygulama”, S.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Dergisi, 22 - 43-52.

DEVEREUX M. B., and Engel C., (2006), "Expectations and Exchange Rate Policy," NBER Working Paper: 12213, pp. 1-33.

DİMİTROVA , D.S., Kaishev, V.K., Penev, S.I. (2008), 'GeD Spline Estimation of Multivariate Archimedean Copulas', *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. 52(7), pp.3570-3582.

ENGEL, Charles, (2006) “Exchange-Rate Models”, NBER Reporter: Research Summary, http://www.nber.org/reporter/fall06/engel.html

ENGLE, Robert,(2002), “Dynamic Conditional Correlation: A New Simple Class of Multivariate GARCH Models”, Journal of Business & Economic Statistics Vol. 20, No. 3, pp.339-350.

GENEST C., and Rivest L. P., (1993), “Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas”, Journal of American Statistical Association, 88 (3): pp. 1034-1043.

GENEST C., Nešlehová J., and Ziegel J., (2011) ,“Inference in multivariate Archimedean copula models”, TEST, 20 (2): pp. 223-256.

KİM G, Silvapulle M. J. and Silvapulle P, (2007) “Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas”, Computational Statistics &. Data Analysis., Vol.51 (6): pp. 2836-2850.

KLİTGAARD T., and Weir L., (2004) , “Exchange Rate Changes and Net Positions of Speculators in the Futures Market”, FRBNY Economic Policy Review, pp.17-28.

LEET-H., and Long X., (2006), “Copula-based Multivariate GARCH Model with Uncorrelated Dependent Errors”, NBER Working paper, pp.1-30.

Lİ X., and XU Q., (2009), "A test procedure for evaluating copula-based multivariate density forecasts", http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1413453.

NELSEN R. B, (1999). "An Introduction to Copulas", Springer-Verlag, New York.

ÖZBAKIŞ Y. Gökhan, (2006), "Bazı Kapula Tahmin Yöntemleri ve Bir Uygulama", Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, ANKARA

ÖZTÜRK, F. ve Özbek L, (2004)., "Matematiksel Modelleme ve Simülasyon", Gazi Kitabevi, Ankara,

PATTON, Andrew. J, (2009), "Copula-based models for financial time series. In Handbook of Financial Time Series", Andersen T.G., Davis R.A., Kresis, J.-P., Mikosch, T. (eds), Springer-Verlag: Berlin, pp. 767-786.

ROBERT F. E, and K. Kroner, Multıvarıate Sımultaneous Generalızed Arch, *Econometric Theory*, Vol. 11, No. 1. (Mar., 1995), pp. 122-150.

TSEY.K. and TSUİ K. C., (2002), "A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model with Time-Varying Correlations", Journal of Business & Economic Statistics, 20 (3): pp.351-362.