Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi
1, 321-329, (1985)

(J,p_n) TOPLANABİLİRLİĞİ İÇİN BİR TABUER TEOREMİ

Yusuf Ali TANDOĞAN
E.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, KAYSERİ

ÖZET

$$\sum_{n=o}^{\infty} p_n s_n x^n$$ serisi (0,1) aralığında yakınsak ve

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{p_s(x)}{p(x)} = s$$

ise, $\sum a^n$ serisi veya (s_n) dizisi s ye (J,p_n) toplanabilirdir denir. Burada

$$p(x) = \sum_{n=o}^{\infty} p_n x^n$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 kabul edilerek, (J,p_n) toplanabilirliği için bir Tauber Teoremi ifade ve ispat edildi.

THE TABUER THEOREM FOR (J,p_n) SUMMABILITY

SUMMARY

Let $$\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$$ series is convergent in the open interval (0,1) and if

$$\lim_{x\to 1} \frac{p_s(x)}{p(x)} = s,$$

we say that the series $\sum a_n$ or the sequence (s_n) is summable (J,p_n) to s. Where that the radius of convergence of power series

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

is 1. In this work we proved the Tauber Theorem for (J, p_n) summability.

1- GİRİŞ

Tauber Teoremleri konusunda ilk olarak 1826 yılında Abel, $\sum a_n = s(A)$ olduğunu ispatlamıştır. Bunun karşıtı doğru olmayabildiğinden buna açıklık getirmek için Tauber [5] 1897 yılında serinin genel terimi olan a_n üzerine bir ek şart koyarak $\sum a_n = s(A)$ ve $n\, a_n = o(1)$ ise $\sum a_n = s$ olduğunu ispatlamıştır. Buna Birinci Tauber Teoremi diyoruz. Daha sonra Tauber, a_n üzerinde koyduğu ilk şartı hafifleterek $\sum a_n = s(A)$ ve $\sum_{v=1}^{n} v\, a_v = o(n)$ ise $\sum a_n = s$ olduğunu ispatlamıştır. Buna da İkinci Tauber Teoremi diyoruz. 1911 yılında ise Littlewould birinci Tauber teoremindeki şartın yerine $n\, a_n = O(1)$ şartını koyarak, Tauber teorisini daha da geliştirmiştir.

Biz burada $\sum a_n$ serisinin (J,p_n) Toplanabilirliği için bir Tauber Teoremi'nden bahsedeceğiz.

2- GENEL TANIMLAR

Bu kesimde çalışmamızda geçen bazı tanımları verelim.

2.1-TANIM (Tauber şartı): B, özel bir limitleme metodu olsun. Herhangi bir dizi üzerine bu dizinin B-limitlenebilmesi (veya serinin B-toplanabilmesi) şartıyla birlikte yakınsaklığını da gerektiren herhangi bir ek şartla, ele alınan bu limitleme metodu (veya toplama metodu) için Tabuer şartı denir [5] .

2.2-TANIM (Tauber Teoremi): Bir dizinin limitlenebilir olmasından yahut bir serinin toplanabilir olmasından, uygun bir yakınsaklık şartı (Tauber şartı) altında bu dizinin veya serinin yakınsaklığını (yahut daha zayıf bir mertebeden toplanabilir olmasını) veren teoreme Tauber Teoremi denir.

2.3-TANIM (Abel Toplanabilirliği): Kısmî toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi gözönüne alalım. Eğer $|x| < 1$ için

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \to 1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = S$$

ise, bu takdirde $\sum a_n$ serisi s değerine A-toplanabilirdir denir [2] , [4] .

2.4.TANIM((J,p_n) Toplanabilirliği): $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 olsun ve

$$P_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$$

diyelim.

Eğer $p_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$ serisi (0,1) aralığında yakınsak ve

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{p_s(x)}{p(x)} = s$$

ise bu takdirde $\sum a_n$ serisi veya (s_n) dizisi s değerine (J,p_n) toplanabilirdir denir [1] , [2] .

3. TEOREM: Kabul edelim ki,

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n}{\sum_{n=1}^{\infty} p_n\left(1-\frac{1}{m}\right)^n} = O(1), \qquad m \to \infty \tag{3,1}$$

$$0 < p_n < M, \quad n=0,1,2,\ldots\ldots, \quad (M \text{ sabit}) \tag{3.2}$$

ve

$$n = O(P_n). \tag{3.3}$$

Ayrıca $\sum a_n$ serisi s değerine (J, p_n) toplanabilsin ve

$$a_n P_n = o(p_n) \tag{3.4}$$

olsun. Bu takdirde $\sum a_n$ serisi s ye yakınsar [3] .

İSPAT: $0 < x < 1$ için biz şunu yazabiliriz.

$$s_m - \frac{p_s(x)}{p(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_m p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{m-1} (s_m - s_n) p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} + \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} (s_m - s_n) p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n}$$

$$= I + J$$

diyelim. Biz burada $I = o(1)$ olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten de $0 < x < 1$ den

$$|I| \leqslant \frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1} |s_m - s_n|\, p_n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n}$$

$$|I| \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n} \Big\{ |s_m - s_o| p_o = |p_o + |s_m - s_1|\, p_1 + \ldots . + $$
$$+ |s_m - s_n|\, p_{m-1} \Big\}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n} \Big\{ p_1 \frac{|a_1|\, p_o}{p_1} + p_2 \frac{|a_2|\, (p_o + p_1)}{p_2} + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots + p_m \frac{|a_m| (p_o + p_1 + \ldots + p_m)}{p_m} \Big\}$$

elde edilir ve böylece $x = 1 - \frac{1}{m}$ için

$$|I| \leqslant \frac{p_m}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n (1 - \frac{1}{m})^n} \cdot \frac{1}{p_m} \Big\{ p_1 \frac{|a_1|\, p_o}{p_1} + p_2 \frac{|a_2|\, p_1}{p_2} + \ldots$$
$$+ \ldots . + p_m \frac{|a_m|\, p_m}{p_m} \Big\}$$

dır. Şimdi $P_n a_n = o(p_n)$ den dolayı

$$\frac{|a_m|\, P_{m-1}}{p_m} = o(1), \quad m \to \infty$$

yazabiliriz. Şu halde

$$|I| \leqslant \frac{P_m}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n} \cdot \frac{1}{P_m}\left\{o(1) + o(1)+\ldots. +o(1)\right\}$$

$$= o(1) \frac{P_m}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n} \cdot \frac{1}{P_m} = o(1) \frac{\sum\limits_{n=0}^{m} p_n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(1-\frac{1}{m})^n} \frac{1}{P_m}$$

Böylece hipotezdeki (3.1)'e göre

$$I = o(1), \quad m \to \infty \tag{3.5}$$

olur.

Şimdi de J yi ele alalım. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için (3.4) den

$$|a_n| \leqslant \varepsilon \frac{p_n}{P_n}$$

olacak şekilde bir m seçelim $(n > m)$, bu takdirde

$$|s_m - s_n| \leqslant |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots.. + |a_n|$$

$$\leqslant \varepsilon\left\{\frac{p_{m+1}}{P_{m+1}} \frac{p_{m+2}}{P_{m+2}} + \ldots\ldots + \frac{p_n}{P_n}\right\} = \varepsilon\ Q_n$$

diyelim. Buna göre, eğer $x=1-\frac{1}{m}$ seçersek

$$|J| \leqslant \frac{\varepsilon \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} Q_n\ p_n\ x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n} \tag{3.6}$$

$$= \frac{\varepsilon \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} Q_n p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n}$$

elde ederiz. $P_n - P_m = p_{m+1} + p_{m+2} + \ldots + p_n$ olduğunu gözönüne alalım, buna göre

$$Q_n \leqslant \frac{p_{m+1}}{P_m} + \frac{p_{m+2}}{P_m} + \ldots + \frac{p_n}{P_m} = \frac{P_n - P_m}{P_m} = \frac{P_n}{P_m} - 1$$

olduğundan

$$|J| \leqslant \frac{\varepsilon \frac{1}{P_m} \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} P_n p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n}$$

$$|J| \leqslant \frac{\varepsilon \frac{1}{P_m^2} \cdot P_m \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} P_n p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n}$$

burada hipotezdeki (3.1) bağıntısını gözönüne alırsak

$$|J| = O(1) \quad \varepsilon \frac{1}{P_m^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} p_n \, P_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n$$

ve (3.2)' den dolayı,

$$|J| = O(1) \ \varepsilon M \ \frac{1}{P_m^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} P_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n$$

yine (3.3)'den de

$$|J| = O(1)\ \varepsilon\ M \frac{1}{p_m^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} n(1-\frac{1}{m})^n$$

elde ederiz. Aynı zamanda tekrar (3.2)'yi kullanarak, (3.3)'den dolayı istenildiği kadar büyük bir m için

$$|J| = O(1)\ \varepsilon\ M \frac{1}{p_m^2} \int_m^{\infty} x(1-\frac{1}{m})^x\ dx$$

$$= O(1)\ \varepsilon\ M \frac{m^2}{p_m^2} = O(1)\ \varepsilon\ M$$

olur. Son olarak

$$J = O(1), \quad m \to \infty \tag{3.7}$$

elde edilir. m yi sonsuza götürdüğümüz takdirde (3.5) ve (3.7)'ye göre

$$\lim_{m\to\infty} (s_m - \frac{p_s(x)}{p(x)}) = o(1) + O(1) = O(1)$$

olmasından ve (J,p_n) toplanabilirlikten dolayı

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{x\to 1^-} \frac{p_s(x)}{p(x)} = s$$

dolayısıyla da

$$\sum a_n = s$$

elde ederiz ki, bu da teoremin ispatıdır.

KAYNAKLAR

1- D.Borwein, "On Methods of Summability Based on Power Series", Proc. Roy.Soc. Edinburgh, Set, A, 64, 342-348, (1957).

2- G.H.Hardy, "Divergent Series", Oxford University Press.(1973)

3- K.Ishiguro, "A Tauberian Theorem for (J,p_n) summability", Proc. Japon Acad. 40,807-812 (1964).

4- K.Knopp, "Theory and Application of Infinite Series", Blackie, (1944).

5- A.Tauber, "Ein satz aus der Theorie unendlichen Reihen", Monatsh. für Math. und Physik vol.8, 273-277, (1897).