Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi **21** (1-2), 35-46, 2005

SİMPLİŞIL PROFİNİTE GRUPLARIN KULLANIMI

Ali MUTLU*, Berrin MUTLU ve Melike SELİMGİL

Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
B Blok Muradiye Kampusü 45030 Manisa

ÖZET

Bu çalışmada simplişıl profinite grupların alt merkezi serileri ve simplişıl grupların p-alt merkezi serilerin spektral dizilerinin yakınsaklık teoremlerinin oldukça farklı ispatlarını veriyoruz. Serre spektral dizileri ve Whitehead teoremlerinde olduğu gibi simplişıl grupların eşhomolojisinin simplişıl profinite gruplarının standart özelliklerine genişletmesi verilir.

Anahtar Kelimeler: Profinite Grup, Simplişıl Grup, Spektral diziler ve Seriler

BY USING SIMPLICIAL PROFINITE GROUPS

ABSTRACT

In this study, we present simplicial pro p-groups to give quite different proofs of the convergence theorems for the lower central series and p-lower central series spectral sequence of simplicial group. Simplicial profinite groups are given to generalise standard properties of the cohomology of simplicial groups such as the Serre spectral and Whitehead theorems.

Keywords: Profinite Group, Simplicial Group, Spectral Sequences and Series

E-posta: ali.mutlu@bayar.edu.tr

GİRİŞ

Simplışıl profinite grupların alt merkezi serileri ve simplışıl grupların p-alt merkezi serilerinin spektral dizilerinin yakınsaklık teoremlerinin daha farklı ispatlarını vermek için simplışıl pro-p gruplarını kullanacağız [1-2]. Teoremlerin ispatları için kaynak [1] de kullanılan serbest gruplarda üreteçlerle ilgili yapılan ince hesaplamalardan daha çok soyut kavram içerir. p-alt merkezi serilerinin spektral dizisinde, özellikle her bir boyutta sonlu olarak üretilmiş homoloji ile birlikte bağlantılı H-uzaylarına eşlenen, bağlantılı olmayan simplışıl gruplar için yakınsaklığı elde ederiz.

Aşağıda ifade edilen ispatın temel düşüncesi için eğer G, her boyuttaki sonlu çokluktaki üreteç ile birlikte serbest simplışıl grupsa, "$\wedge$" p-tamamlayıcısını göstermek üzere, ters limitler $\pi(\hat{G})$'ye kuvvetli yakınsayan G'nin profinite gruplarının p-alt merkezi serilerinin spektral dizisi için tamdır. Böylece spektral dizilerin $\pi(G)$'ye olan zayıf yakınsaklığı $(\pi G)^{\wedge} \to \pi(\hat{G})$ formülü ile ifade edilir ve ana teoremimiz bize bu elde edilenlerin ışığında birtakım şartlar verir. Homotopi teorisi üzerine olan çalışmalarında, pro-p homotopi nesneleri ile ilgili olan örnek teoremi ispatlayan Artin-Mazur'un metodlarında birtakım değişikler yapılarak ana teorem ifade edilir.

Bu makalede öncelikle ana teoremi ifade edilerek daha sonra yakınsaklık teoremlerinin uygulamaları verilir. Son bölümde ise Serre spectral dizileri ve Whitehead teoremlerinde olduğu gibi simplışıl grupların eşhomolojisinin simplışıl profinite gruplarının standart özelliklerine genelleştirilmesi ifade edilir.

1. İMPLİŞIL PROFİNİTE GRUPLAR, ANA TEOREMİN İFADESİ VE UYGULAMALARI

Giriş

Bu bölümde öncelikle ana teoremin ifadesi için gerekli olan kavramlar açıklanacaktır ve ardından da ana teorem verilecektir. Bu teoremin uygulaması olarak da Curtis bağlantılılık teoremi ve simplişıl profinite grup yakınsaklık teoremleri ifade edilecek ve ispatları yapılacaktır.

Biz profinite gruplarla [3]) ve (yarı) simplişıl gruplarla [4] ilgili olan birtakım kavramların bilindiğini kabul ediyoruz. Profinite grupların temel özelliği; ters limit fanktörünün filtre edilmiş ters limitler için tam olmasıdır. $i \in \mathrm{I}$; I yönlendirilmiş cümlesi ile birlikte eğer $\mathbf{G}_i$ simplişıl profinite grupların ters sistemi ise

$$\pi_q\left(\lim_{\leftarrow} \mathbf{G}_i\right) \cong \lim_{\leftarrow} \pi_q \mathbf{G}_i \,. \tag{1.1}$$

G bir simplişıl grup ve M, $\pi_0 G$-modülü ise bu taktirde simplişıl cümlesi $\overline{W}G$ "sınıflandırılmış uzay" üzerindeki yerel katsayı sistemini tanımlar ve bu yerel katsayı sisteminin eşhomoloji ve homolojisi olan M'deki değerlerle birlikte G'nin $H_q(G,M)$ homolojisini ve $H^q(G,M)$ eşhomolojisini tanımlarız. Daha önce de tanımlanan $H^q(G,M)$ ve $H_q(G,M)$'nin alışılmış Eilenberg-Maclane homolojisi ve eşhomolojisi olması durumunda ve her bir boyutta π olan, her yüz ve bozulmuş operatörlere sahip olan sabit simplişıl grupla, π grubunun özdeşliğini vereceğiz.

π profinite grubu üzerindeki M modülü ile ayrık topolojili topolojik π modülü kastedilmektedir. $\mathbf{U}$; $\mathbf{G}$'nin açık normal simplişıl altgrubunun yönlendirilmiş cümlesi üzerinde iken $\mathbf{G}$, simplişıl profinite grup ve M'de $\pi_0\mathbf{G}$ modülü ise M'deki değerlerle birlikte $\mathbf{G}$'nin eşhomolojisini

$$H^q(\mathbf{G},M) = \lim_{\rightarrow} H^q\left(\mathbf{G}/\mathbf{U}, M^{\pi_0 \mathbf{U}}\right) \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlarız. **G** ; sabit olduğu zaman [5]' deki eşhomoloji tanımını elde ederiz.
p; asal bir sayı olsun. π'; p'nin indeks kuvvetinin normal altgrubunun cümlesi üzerinde olmak üzere eğer π bir grupsa, π'; p-tamamlayıcısıdır. Örneğin; $\varprojlim \pi/\pi'$. Eğer M ; aynı zamanda abelyen p-grubu olan π modülü ise aşağıdaki şartlar denktir:

(i) $M; \pi \to \hat{\pi}$ dönüşümü altındaki $\hat{\pi}$ modülünden elde edilir.

(ii) M ; aşikar π etkisi ve $\mathbf{Z}/p$ formunun bölünüşü ile birlikte bileşke seriye sahiptir.

(iii) M üzerinde aşikar olarak bulunan elemanları içeren π'nin bir alt grubu p'nin kuvvet indeksidir.

Eğer bu şartlar sağlanırsa π'nin; M üzerinde unipontently olduğu söylenebilir.
$\wedge$; boyutsal genişlemesi olmak üzere $G \to \hat{G}$; simplişıl grupların kategorisinden simplişıl pro-p grupların kategorisine giden bir fanktörüdür. Normalize edilmiş $N_q\mathbf{G}$ altgrupları ve $\mathbf{G}$ simplişıl pro-p grubunun $\pi_q\mathbf{G}$ Moore homotopi grupları; pro-p gruplarıdır. Böylece $\pi_q G \to \pi_q \hat{G}$ dönüşümü tek olarak

$$\left(\pi_q G\right)^{\wedge} \to \pi_q \hat{G} \tag{1.3}$$

kanonik dönüşümüne genişletilebilir.
Eğer M ; $\pi_0 \hat{G}$ modülü ise

$$H^q\left(\hat{G}, M\right) \to H^q\left(G, M\right) \tag{1.4}$$

kanonik dönüşümü mevcuttur. Eğer bu dönüşüm abel p-grubu olan tüm M'ler için ve q için izomorfizim ise G'nin $p-$good olduğu söylenebilir. (Yukarıdaki (ii) yeterdir ki (1.4) $M = \mathbf{Z}/p$ ve tüm q'lar için izomorfizimdir.) G'nin sabit olması durumunda bu tanım ; p. 1-16 [3]'de verilenlerden birinin açık bir genişlemesidir.

$\hat{G} = G \to \pi_0 G$ genişlemesinin çekirdeği; G'nin evrensel kapsaması olsun. Eğer M , $\pi_0 G$ modülü ise, bu taktirde $G_0; \left(\tilde{G}, M\right)$ eşlenik çifti üzerinde etkilidir denir. Bundan dolayı $H_q\left(\tilde{G}, M\right)$'nin de üzerindedir ve bu etki $H_q\left(\tilde{G}, M\right)$ de $\pi_0 G$'nin bir etkisini doğurur.

Şimdi temel teoremimizi ifade edebiliriz.

TEOREM 1.1 (ANA TEOREM) : G; aşağıdaki şartları sağlayan bir simplişıl grup olsun.

(i) G; $p-$good'dur.

(ii) $\pi_0 G$; $p-$good'dur.

(iii) $H_q\left(\tilde{G}, \mathbf{Z}\right)$; tüm q'lar için sonlu olarak üretilmiştir.

(iv) $\pi_0 G$; tüm q'lar için $H_q\left(\tilde{G}, \mathbf{Z}/p\right)$ üzerinde unipotently olarak etki eder.

Bu durumda (1.3) kanonik dönüşümü; tüm q'lar için izomorfizimdir.
Bu teoremin birinci uygulaması, [6] simplişıl Lie cebirinden daha basit olan simplişıl [1] gruplar için olan Curtis'in bağlantılılık teoremini belirtir. $r \geq f\left(q\right)$ ve X de herhangi bir bağlantılı serbest simplişıl abelyen grup ise $f\left(q\right)$;

$\pi_q\left(L,X\right)=0$ olacak şekilde q (örneğin, 2^q)'nun herhangi bir fonksiyonu olsun. $\Gamma_r\,\pi$; π grubunun alt merkezi serileri ve $gr\pi=\oplus\Gamma_r\,\pi/\Gamma_{r+1}\,\pi$ birleştirilmiş Lie cebiri olsun.

SONUÇ 1. 2: $\pi_0 G=0$ olacak şekilde G serbest simplişıl grup ise bu taktirde $r>f\left(q\right)$ için $\pi_q\Gamma_r=0$ olur.

İSPAT: Öncelikle G'nin her boyutta sonlu üretilmiş olması durumuna sınırlandırdığımızı kabul edelim. G'nin bağlantılı olmasındaki gibi; F, 0 dan büyük boyutlu tüm üreteçlerle birlikte serbest olmak üzere $F\to G$ zayıf denkliğini oluşturmak için simplişıl metoduyla birleştirilmiş hücreleri elde edebiliriz. G'nin serbest olmasında olduğu gibi onun homotopisi F'ye denktir. Böylece biz $G_0=1$ olduğunu kabul edebiliriz. Fakat bu durumda G, bozulmuş olmayan üreteçlerin cümlesinin simplişıl alt grupların tümevarımsal ağ limiti G'nin bozulmuş olmayan üreteçlerinin cümlesinin sonlu bir alt cümlesidir. $G_0=1$, π_* ve Γ_r, tümevarımsal ağ limitleri ile yer değiştirdikleri zaman bu alt grupların her biri bağlantılıdır ve biz G'nin; birçok sonlu bozulmuş olmayan hücrelere sahip olduğunu kabul edebiliriz Böylece $G_0=1$ olur.

$$\begin{array}{ccc}\left(\pi_q G\right)^{\wedge} & \to & \lim\limits_{\overleftarrow{r}}\pi_q\left(G/\Gamma_r G\right)^{\wedge}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \pi_q\hat{G} & \to & \lim\limits_{\overleftarrow{r}}\pi_q\left(\left(G/\Gamma_r G\right)^{\wedge}\right)\end{array}\tag{1.7}$$

diyagramını göz önüne alalım.

Düşey oklar, ana teoremden elde edilen izomorfizimlerdir. $H_q\left(G,\mathbf{Z}\right)=\pi_{q-1}\left(gr_1 G\right)$; sonlu üretilmiştir, $\pi_0 G=0$, serbest simplişıl grupları good'dur. Böylece ana teorem G'ye uygulanır. r üzerinden tümevarım yoluyla $gr_1 G=L_r\left(gr_1 G\right)$, her bir boyutta sonlu üretilmiştir. Tam uzun homotopi dizisi $1\to gr_r G\to G/\Gamma_{r+1}G\to G/\Gamma_r G\to 1$ ile birleştirilmiştir. $\pi_q\left(G/\Gamma_r G\right)$ sonlu üretilmiş olduğu görülür. Fakat $G/\Gamma_r G$ nin 0-boyutta olduğu açıktır ve böylece bağlantılıdır. Böylece Serre ile $H_q\left(G/\Gamma_r G_0\mathbf{Z}\right)$ sonlu üretilmiştir. Üstelik $G/\Gamma_r G$; good'dur. Çünkü o; her bir boyutta sonlu üretilmiş nilpotent grubudur. Şu halde ana teorem; $G/\Gamma_r G$ ' ye uygulanır.

Şimdi eğer U ; herhangi bir G grubunda p'nin indeks kuvvetinin normal alt grubu üzerinde etki ediyorsa, bu taktirde p-grubunun nilpotent olması durumunda

$$\begin{aligned}\lim_{\overleftarrow{r}}\left(G/\Gamma_r G\right)^{\wedge}&=\lim_{\overleftarrow{r}}\lim_{\overleftarrow{U}}\left(G/U\right)/\Gamma_r\left(G/U\right)\\&=\lim_{\overleftarrow{U}}\lim_{\overleftarrow{r}}\left(G/U\right)/\Gamma_r\left(G/U\right)=\lim_{\overleftarrow{U}}G/U=\hat{G}\end{aligned}\tag{1.8}$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak (1.1)' den, (1.7)'nin üst satırı izomorfizimdir. Böylece (1.7)'deki tüm dönüşümler izomorfizimdir.

Simplişıl Lie cebirleri için Curtis'in bağlantılılık teoreminden $r \geq f(q)$ için $\pi_q(gr_r G) = \pi_q(L_r(gr_1 G)) = 0$ olduğu görülür. Böylece $\pi_q(G/\Gamma_r G)$ ters sistemi; $r > f(q)$ için sabitleştirilir ve biz $\pi_q(G)^\wedge \to \pi_q(G/\Gamma_r G)^\wedge$ 'nin $r > f(q)$ için bir izomorfizim olduğunu görürüz. Fakat herhangi bir asal p sayısı için $\wedge$; p-tamamlayıcısı olduğu zaman doğrudur. Böylece her iki grup da $r > f(q)$ için $\pi_q G \tilde{\to} \pi_q(G/\Gamma_r G)$ sonlu üretilmiş abelyen gruplarıdır. Bu ise ispatı tamamlar. +

Ana teoremin ikinci bir uygulaması; [2]'de Rector'un bağlantılı olmayan simplişıl gruplarının sınıfları ile ilgili olan sonucunda genelleştirilmiştir. Eğer π bir grupsa $r \geq 1$ için $\Gamma_r^p \pi$ onun p-alt merkez serisi ve $gr^p \pi = \oplus \Gamma_r^p \pi / \Gamma_{r+1}^p \pi$; $\mathbf{Z}/p$ üzerindeki birleştirilmiş p-Lie cebiridir. Eğer $L^p V = \oplus L_r^p V$; $\mathbf{Z}/p$ modül V ile üretilmiş serbest p-Lie cebiri ise 1. derecede özdeş olan p-Lie cebirinin

$$L^p\left(gr_1^p \pi\right) \to gr^p \pi \tag{1.9}$$

kanonik dönüşümü her zaman örtendir ve π serbest olduğu zaman izomorfizimdir. G; serbest simplişıl grupsa $\Gamma_r^p G$ artan ağı;

$$E_{n\,m}^1 = \pi_n L_m^p gr_1^p G \qquad d_r : E_{nm}^r \to E_{n-1,m+r}^r \tag{1.10}$$

p-alt merkezi spektral dizisini üretir.

ÖNERME 1.3: Bütün q'lar için $H_q(G/\mathbf{Z}) = \pi_{q-1}\left(gr_1^p G\right)$ sonlu olacak şekilde eğer G bir serbest simplişıl grupsa (1.10) spektral dizisi $\pi_n \hat{G}$' ye kuvvetli yakınsar.

İSPAT: π'; π' nin açık normal alt grubu üzerinde etki etmek üzere $\Gamma_r^p \pi = \lim_{\leftarrow} \Gamma_r^p(\pi/\pi')$ ile birlikte $pro-p$ grubu için p-alt merkezi serisini tanımlayalım. Ters limitler $gr^p \pi = \lim_{\leftarrow} gr^p(\pi/\pi')$ profinite grupları için tamdır

$$\left.\begin{aligned} \pi = \lim_{\substack{\leftarrow \\ \pi'}} \pi/\pi' &= \lim_{\substack{\leftarrow \\ \pi'}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ r}} (\pi/\pi')/\Gamma_r^p(\pi/\pi') \\ &= \lim_{\substack{\leftarrow \\ r}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ \pi'}} (\pi/\pi')/\Gamma_r^p(\pi/\pi') = \lim_{\substack{\leftarrow \\ r}} \pi/\Gamma_r^p \pi \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

$\mathbf{V}$ bir profinite $\mathbf{Z}/p$ modülü $L^P\mathbf{V} = \lim_{\leftarrow} L^p(\mathbf{V}/\mathbf{V}')$ ile üretilen p-Lie cebiri tanımlarsa bu taktirde (1.9) daki ters limitle ilgili olan açıklamalardan

$$L^p\left(gr_1^p \pi\right) \to gr^p \pi \tag{1.12}$$

bir kanonik dönüşümü elde edilir.

LEMMA 1. 4: (1.12) dönüşümünün bir izomorfizim olması için gerek ve yeter şart π'nin bir serbest $pro-p$ grup olmasıdır.

İSPAT: S' nin hemen hemen bütün elemanlarını ihtiva eden p'nin kuvvet indeksli normal altgruplarının ailesine göre bir S cümlesi tarafından üretilen FS serbest grubunun tamamlayıcısının tanımıyla $\mathbf{F}$ bir serbest $pro-p$

gruptur [3]. Diğer bir deyişle S 'nin sonlu alt cümleleri S' olmak üzere $\mathbf{F} = \varprojlim_{S'} \varprojlim_{r} FS' / \Gamma_r^p FS'$ ve S_2' de $S_2' \subset S_1'$ özdeşlik olduğunda $FS_1' \to FS_2'$ dönüşümü ile birlikte $S_1' - S_2'$ de sıfıra gider.

(1.12)'nin tanımından; (1.9), FS' için izomorfizim iken, $\mathbf{F}$ için de izomorf olduğu görülür. Böylece derecesi $\le r$ de $\pi = FS' / \Gamma_r^p FS'$ bir izomorfizimdir. Tersine olarak eğer (1.12) bir izomorfizim ise, bu taktirde $gr_1^p u$; izomorfizim olacak şekilde $\mathbf{F}$ serbest olmak üzere $u : \mathbf{F} \to \pi$ bir dönüşüm seçilsin. [3] $gr^p u$ grubu mevcut olup bundan dolayı u bir izomorfizimdir. Bu da lemmayı ispatlar.

$G \to \hat{G}$ dönüşümü $\Gamma_r^p G$ 'yi $\Gamma_r^p \hat{G}$ ' ye götürür. Böylece

$$\pi_*\left(gr^p G\right) \to \pi_*\left(gr^p \hat{G}\right) \tag{1.13}$$

spektral dizilerinin dönüşümünü doğurur. $gr_1^p G$ simplişıl $\mathbf{Z}/p$ modülüdür. Bundan dolayı hipotezden her bir sonlu boyutta olan $N = \oplus_q K\left(\pi_q gr_1^p G, p\right)$ simplişıl $\mathbf{Z}/p$ modülüne denk olan homotopidir. Böylece $gr_1^p \hat{G} = \left(gr_1^p G\right)^\wedge$; $\hat{N}$ ' ne denk bir homotopidir ve bundan dolayı $gr^p \hat{G}$, Lemma 1.4'den $L^p\left(gr_1^p \hat{G}\right)$ 'ye eşittir, [3] gerçekten bir serbest grubun tamamlanışı serbesttir ve $L^p \hat{N}$ homotopik olarak denktir. Fakat $N = \hat{N}$ olup $L^p \hat{N} = L^p N$ olan $gr^p G$ homotopik olarak denktir. Şu halde (1.13) spektral dizilerin izomorfizmidir. Ama ikinci spektral diziler (1.1) ve (1.2) ile $\pi_n \hat{G}$ ' ne kuvvetle yakınsarlar. Böylece Önerme 1.3'ün ispatı tamamlanır.

Ana teoremi ve Önerme 1.3'ü birleştirerek aşağıdaki teoremi elde ederiz.

TEOREM 1.5: G aşağıdaki şartları sağlayan serbest simplişıl grup olsun.

- **(i)** $H_q\left(\tilde{G}, \mathbf{Z}\right)$; tüm q 'lar için sonlu olarak üretilmiştir.
- **(ii)** $H_q\left(G, \mathbf{Z}/p\right)$; tüm q 'lar için sonludur.
- **(iii)** $\pi_0 G$; p -good'dur.
- **(iv)** $\pi_0 G$; tüm q 'lar için $H_q\left(\tilde{G}, \mathbf{Z}/p\right)$ üzerinde unipotently olarak etki eder.

Bu taktirde (1.10) p -alt merkezi serilerinin spektral dizileri aşağıdaki şartlar altında $\pi_n G$ 'ye zayıf bir şekilde yakınsar.

- **(a)** $E_{nm}^{\infty} = \varprojlim E_{nm}^{r}$ $r > m$
- **(b)** $Çek\left\{\pi_n G \to \pi_n\left(G / \Gamma_m^p G\right)\right\}$ ağı ile verilen $\pi_n G$ üzerindeki topoloji p -topolojisidir.

SONUÇ 1.6: G simplişıl grupların homotopi kategorisinin "H -uzayı" nesnesi olan serbest simplişıl grup olsun. Eğer $H_q\left(G, \mathbf{Z}\right)$; tüm q 'lar için sonlu üretilmiş ise, bu taktirde G 'nin p -alt merkez serilerinin spektral dizisi zayıf bir şekilde $\pi_n G$ ' ye yakınsar.

İSPAT: Bu durumda $\pi_0 G$ abeldir ve $H_*\left(\tilde{G}, \mathbf{Z}\right)$ üzerinde aşikar olarak etki eder. Böylece $\pi_0 G = H_1\left(G, \mathbf{Z}\right)$ sonlu üretilmiştir ve p -good'dur. Üstelik $\tilde{G} \to G \to \pi_0 G$ fibrasyonunun spektral dizi homolojisine uygulanan Serre

[18]'nin iyi bilinen tartışması ile $H_q\left(\tilde{G}, \mathbf{Z}/p\right)$'nin tüm q'lar için sonlu üretilmiş olduğu görülür. Böylece sonuç, Teorem 1.5' den elde edilir.

Örnek: G, Kan'ın [4] teorisi altında $\mathbf{R}P^k$ reel izdüşüm uzayına eşlenen simplişıl grup olsun. Eğer $p=2$ ise Teorem 1.5 hipotezi sağlanır, fakat eğer p tek iken k da tek ise $\pi_1 \mathbf{R}P^k = \mathbf{Z}/2$ tamamen $H_*\left(S^k, \mathbf{Z}/p\right)$ üzerinde unipotently olarak etki eder. Eğer k çift ise $_* \to \mathbf{R}P^k$ dönüşümü homoloji izomorfizmidir. Böylece dizi ya yakınsayamaz ya da $0 = \pi_n\left(\mathbf{R}P^k\right)^\wedge = \pi_n\left(S^k\right)^\wedge$, $(n>1)$ etkili değildir.

2. SİMPLİŞIL PROFİNİTE GRUPLARIN EŞHOMOLOJİSİ

Giriş

Bu bölümde, simplişıl grupların eşhomolojisinin simplişıl profinite gruplarının standart özelliklerinin genelleştirilmesi işlemi için gerekli olan bilgileri içeren Serre spektral dizileri ile ilgili önermeler, lemmalar ve onların ispatları ile Whitehead teoremi ifade edilir. Ayrıca Whitehead teoreminin ispatından elde edilen sonuçlar da ayrıntılı olarak açıklanarak ispatlanır.

Simplişıl grupların eşhomolojisinin aşağıdaki özelliklerine ihtiyaç duyacağız. Simplişıl cümlelerin ya da grupların dönüşümü eğer homotopi grupları üzerindeki izomorfizimleri belirtiyorsa zayıf denklik olarak adlandırılır.

ÖNERME 2.1: G, H simplişıl gruplar ve M de $\pi_0 G$ modülü olsun.

(a) Eğer $f: H \to G$ zayıf homotopik denkse, bu taktirde $H^*\left(f, M\right): H^*\left(G, M\right) \to H^*\left(H, M\right)$ izomorfizimdir.
(b) Eğer f ve g simplişıl grupların H'dan G'ye giden homotopik dönüşümleri ise, bu taktirde $H^*\left(f, M\right) = H^*\left(g, M\right)$.
(c) $\mathrm{H}^q(G, M); n \to H_q\left(G_n, M\right)$ eşsimplişıl abelyen grup ve $\delta = \sum(-1)^i \delta_i\ \pi^p$ diferansiyeline göre homoloji olan π^p onun eşhomotopisi olmak üzere örneğin; $E_2^{pq} = \pi^p \mathrm{H}^q\left(G, M\right) \Rightarrow H^{p+q}\left(G, M\right)$ bir kanonik spektral dizisi vardır.
(d) Eğer $\pi_0 G; M$ üzerinde aşikar etki ise

$$H^0\left(G, M\right) = M^{\pi_0 G}$$
$$H^1\left(G, M\right) = Hom_{(gps)}\left(\pi_0 G, M\right)$$

bir kanonik izomorfizmi vardır.
(e) Eğer $1 \to R \to G \to H \to 1$; simplişıl grupların tam dizisi ise, bu taktirde $E_2^{pq} = H^p\left(H, H^q\left(R, M\right)\right) \Rightarrow H^{p+q}\left(G, M\right)$ bir Serre spektral dizisi vardır.
(f) $H^*\left(G, M\right); M$ ' nin eşcohomolojikıl fanktörüdür.

İSPAT: (c)' nin dışındaki durumlar $\overline{W}$ sınıflandırılmış uzay fanktörünün özelliklerinden elde edilir. Şu halde (e) $\overline{W}R \to \overline{W}G \to \overline{W}H$ fibrasyonu için Serre spektral dizisidir. (bakınız [7], Appendix II) (d)' nin ikinci kısmı; Poincare ve universal katsayı teoreminden elde edilir. (b) açıktır çünkü $\overline{W}f$ ve $\overline{W}g$, homotopiktirler. $\overline{W}G$ ve $\overline{W}H$ genişletilmiş şartları sağlanmak üzere $\overline{W}f$ ' nin zayıf denklik ve homotopi denkliği olması da (a)'dan elde edilir.

(c)'nin ispatı için $W(G)$, π grubunun sınıflandırılmış simplişıl cümlesi olmak üzere $\omega(G)$; $\omega(G)_{pq} = W\left(G_p\right)_q$ ile verilen bisimplişıl grup olsun. $W(\pi)$'nin aşikar homotopiye sahip olması gibi $\omega(G)$'de aşikar dikey homotopiye sahiptir ve böylece $\left[\Delta\omega(G)_n\right] = \omega(G)_{nn}$ olmak üzere [8] bisimplişıl grubunun spektral dizisinden dolayı $\Delta\omega(G)$ aşikar homotopisine sahiptir. Şimdi simplişıl altgrubunda olduğu gibi π , $W(\pi)$ tarafından içerilir. Böylece yine simlişıl altgruplarda olduğu gibi G de $\Delta\omega(G)$ tarafından içerilir. Böylece $\Delta\omega(G)$ temel büzülebilir simplişıl G cümlesi ve böylece G simplişıl cümlesinde olduğu gibi $W(G)$'ye giden bir homotopi denkliğidir. Şu halde Map_G; G cümlelerinin kategorisindeki morfizimlerin cümlesini göstermek üzere $\pi^q Map_G\left(\Delta\omega(G), M\right) = \pi^n Map_G\left(W(G), M\right) = H^n(G, M)$. $Map_G\left(\omega(G), M\right)^{pq} = Map_{G_p}\left(W\left(G_p\right)_q, M\right)$ bi-eşsimplişıl abelyen grupların spektral dizilerinden bir tanesi;

$$E_2^{pq} = \pi_h^p \pi_v^p Map_G\left(\omega(G), M\right) \Rightarrow \pi^{p+q}\left(\Delta Map_G\left(\omega(G), M\right)\right)$$

olur. Aynı zamanda bunun (c)' de istenen spektral dizi olduğu açıktır. Bu da önermenin ispatını tamamlar.

HATIRLATMA: R simplişıl halkası üzerindeki sağ simplişıl Y modülü ve sol simplişıl X modülünden elde edilmiş $X \overset{L}{\oplus}_R Y$ tensör çarpımına ait olan Kunneth spektral dizilerinin sonucunda olduğunda gibi [9]'de türetilen homoloji için özellikler eşlenir. X sol simplişıl modül ve Y de R simplişıl halkası üzerindeki sol eşsimplişıl modülü olmak üzere türetilen $\mathbf{R}Hom_R(X, Y)$ *Hom* fanktörüne ait olan genel spektral dizilerinden eşhomolojinin aşağıdaki özellikleri oluşturulmuştur.

ÖNERME 2.2 : $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ simplişıl profinite gruplar ve M de $\pi_0\mathbf{G}$ modülü olsun.

(a) Eğer f ve g simplişıl profinite grupların $\mathbf{H}$ 'dan $\mathbf{G}$ 'ye giden homotopik dönüşümleri ise, bu taktirde $H^*(f, M) = \mathbf{H}^*(g, M)$.

(b) $E_2^{pq} = \pi^p H^q(\mathbf{G}, M) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbf{G}, M)$ şeklinde ifade edilen bir kanonik spektral dizisi mevcuttur.

(c) *Homcont* ; M üzerindeki ayrık topoloji ve $\pi_0\mathbf{G}$ üzerindeki topoloji için sürekli olan homomorfizimlerin cümlesi iken eğer $\pi_0\mathbf{G}$; M üzerinde aşikar olarak etki ediyorsa $H^0(\mathbf{G}, M) = M^{\pi_0\mathbf{G}}$ $H^1(\mathbf{G}, M) = Homcont(\pi_0\mathbf{G}, M)$ kanonik izomorfizimleri vardır.

(d) Eğer $1 \to \mathbf{R} \to \mathbf{G} \to \mathbf{H} \to 1$; simplişıl profinite grupların tam dizisi ise, bu taktirde $E_2^{pq} = H^p\left(\mathbf{H}, H^q(\mathbf{R}, M)\right) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbf{G}, M)$ spektral dizisi vardır.

(e) $H^q(\mathbf{G}, M)$ ' nin eşhomolojikıl fanktörüdür.

İSPAT: (a) $\mathbf{G} \to \mathbf{G}^{\Delta(1)}$; simplişıl profinite grupların kategorisi üzerindeki yol fanktörü olsun. *Hom* ; simplişıl profinite grupların kategorisi için dönüşümlerin kompleks fonksiyonu olacak şekilde

$Hom\left(\mathbf{H},\mathbf{G}^{\Delta(1)}\right) = Hom\left(\mathbf{H},\mathbf{G}\right)^{\Delta(1)}$ ([9], Bölüm 11, 1.3) .Şu halde f ’ den g ’ ye olan homotopi $h:\mathbf{H}\to\mathbf{G}^{\Delta(1)}$ dönüşümü ile temsil edilir. $\mathbf{G}^{\Delta(1)}$ nesnesi vardır ve $\mathbf{G}$ ’den elde edilen profinite simplişıl grubun yapısı ile birlikte verilen simplişıl cümlelerin kategorisindeki $\Delta(1)$ ’ den $\mathbf{G}$ ’ye olan kompleks dönüşümlerin alışılmış kompleks fonksiyonudur. (Bakınız [9], Önerme 3.1) Sonuç olarak $\mathbf{G}$ simplişıl sonlu grubu $\mathbf{G}^{\Delta(1)}$. Eğer $\mathbf{V}$, $\mathbf{G}$ ’ nin açık normal simplişıl altgrubu ise $h^{-1}\left(Çek\mathbf{G}^{\Delta(1)} \to \left(\mathbf{G}/\mathbf{V}\right)^{\Delta(1)}\right)$ anlamında olan $\mathbf{H}$ ’ın açık normal simplişıl alt grubudur. Böylece eğer $\mathbf{U}$, $\mathbf{H}$ ’ın daha küçük açık normal alt grubu ise f ve g ’den elde edilen $\mathbf{H}/\mathbf{U}$ ’ dan $\mathbf{G}/\mathbf{V}$ ’ye olan $f_{\mathbf{U,V}}$ ve $g_{\mathbf{U,V}}$ dönüşümleri homotopiktir. Böylece $H^*\left(f_{\mathbf{U,V}}, M^{\pi_0\mathbf{V}}\right) = H^*\left(g_{\mathbf{U,V}}, M^{\pi_0\mathbf{V}}\right)$. $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ ’nin tüm açık normal simplişıl alt grupları üzerindeki gibi alınırsa direkt limiti bizi (a)’ nın ispatı olan $H^*(f,M) = H^*(g,M)$ eşitliğinin varlığına götürür.

LEMMA 2.3: $\mathbf{U}$, $\mathbf{G}$ ’nin açık normal alt gruplarının yönlendirilmiş cümlesi üzerinde bulunmak üzere eğer $\mathbf{G}$ simplişıl profinite grupsa bu taktirde her bir n için $\mathbf{G}_n = \lim\limits_{\leftarrow}\left(\mathbf{G}/\mathbf{U}\right)_n$ olur.

$\varphi, [n]$ ’ den $[k]$ ’ ya giden monoton dönüşümlerin sonlu cümlesi üzerinde bulunmak üzere $\mathbf{V}$, $\mathbf{G}_n$ ’deki açık ve normal iken $\mathbf{U}_k = \cap\left(\varphi^*\right)^{-1}\mathbf{V}$ cümlesi verilmiş olsun. $\mathbf{U}$ ’nun $\mathbf{U}_n \subset \mathbf{V}$ şartı ile birlikte $\mathbf{G}$ ’nin açık normal simplişıl alt grubu olduğu açıktır. Böylece lemma elde edilir.

(b) Lemma 2.3 kullanılarak $\mathbf{G}/\mathbf{U}$ simplişıl alt grupları için Önerme 2.1 (b) deki spektral dizilerdeki tümevarım limitinden ilgili kısım elde edilir.

(c) Önerme 2.1 (d)’ nin limit ile ilgili kısmından elde edilir.

LEMMA 2.4: $i\in I$ iken $\mathbf{G}_i$ simplişıl grupların ters sistemi olsun ve $i\in I$ iken M_i ’ de aynı yönlendirilmiş I cümlesi tarafından indekslenmiş abelyen grupların yönlendirilmiş sistemi olsun. $i\le j$ için $M_i \to M_j$ dönüşümü $\pi_0\mathbf{G}_j$ modülü bir homomorfizim olacak şekilde her bir M_i ’ nin $\pi_0\mathbf{G}_i$ modül yapısına sahip olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $\lim\limits_{\rightarrow} H^q\left(\mathbf{G}_i, M_i\right) \tilde{\to} H^q\left(\lim\limits_{\leftarrow}\mathbf{G}_i, \lim\limits_{\rightarrow} M_i\right)$.

Bu durum oldukça kolay olan Önerme 2.2 (b) ile sabit simplişıl grupların durumuna indirgenebilir.

(d) $\mathbf{U};\mathbf{G}$ ’ nin açık normal simplişıl altgruplarının yönlendirilmiş cümlesi üzerinde bulunmasında olduğu gibi lemmadan $\mathbf{U}_n$ ’ de $\mathbf{G}_n$ ’ deki (d)’nin baz komşuluğu üzerinde bulunur. Bundan dolayı i ve f, $\mathbf{R}\to\mathbf{G}$ ve $\mathbf{G}\to\mathbf{H}$ dönüşümleri ise $i^{-1}\mathbf{U}_n$ ve $f\mathbf{U}_n$; sırasıyla $\mathbf{R}_n$ ve $\mathbf{H}_n$ ’deki (d) için baz formundadırlar. Şu halde $\mathbf{R} = \lim\limits_{\leftarrow}\mathbf{R}/i^{-1}\mathbf{U}$ ve $\mathbf{H} = \lim\limits_{\leftarrow}\mathbf{H}/f\mathbf{U}$ olur. $\mathbf{U};\mathbf{G}$ ’ nin açık normal simplişıl alt grupları üzerinde bulunmak üzere M^{π_0} modülü ve $1\to\mathbf{R}/i^{-1}\mathbf{U}\to\mathbf{G}/\mathbf{U}\to\mathbf{H}/f\mathbf{U}\to 1$ tam dizileri ile birleştirilen Önerme 2.1 (d)’ deki spektral dizilerdeki limiti kullanarak (d)’ yi elde ederiz. Bu da Önerme 2.2’ nin ispatını sonuçlandırır. +

Serre [10] metodundan ispat için Serre spektral dizisini kullanabiliriz.

WHITEHEAD TEOREMİ 2.5: $f:\mathbf{G}\to\mathbf{H}$ ’ın simplişıl profinite grupların dönüşümü ve $n\ge 1$ olsun. Ayrıca $\pi_q\left(f\right):\pi_q\left(G\right)\to\pi_q\left(H\right)$ dönüşümü mevcut ise bu taktirde aşağıdaki şartlar birbirine denktir.

(i) $q = n$ için $\pi_q f$ örten ve $q < n$ için $\pi_q f$ izomorfizimdir.

(ii) $\pi_0 f$; izomorfizim ve her $\pi_0\mathbf{H}$ modül M , $q \le n$ için $H^q\left(f, M\right)$ bir izomorfizim ve $q = n+1$ için $H^q\left(f, M\right)$ birebirdir.

(iii) (ii) ile aynıdır fakat M herhangi bir indirgenemez $\pi_0\mathbf{H}$ modülüdür (M asal bir p sayısı için $\mathbf{Z}/p$ üzerinde yeter derecede sonlu boyutludur.).

SONUÇ 2.6: $\mathbf{R}$; simplişıl profinite grup ve $n \ge 1$ olsun bu taktirde $q < n$ için $\pi_q\mathbf{R} = 0$ oması için gerek ve yeter şart $0 < q < n$ ve tüm p asalları için $\pi_0\mathbf{R} = 0$ ve $H^q\left(\mathbf{R}, \mathbf{Z}/p\right) = 0$ olmasıdır.

TEOREM 2.5'İN İSPATI: (ii) ve (iii)' ün denkliği : (ii)$\Rightarrow$(iii) açıktır.
(iii)$\Rightarrow$(ii) : Şimdi de (iii) nin doğruluğunu kabul edelim. Beş lemmasından $H^q\left(f, M\right)$ için $\pi_0\mathbf{H}$ modül M nin A ailesi $q \le n$ için izomorfizimdir ve $q = n+1$ için örtenlik sağlanır. $1 \to M' \to M \to M'' \to 0$ bir tam dizi ise, bu taktirde $M', M'' \in \wp \Rightarrow M \in \wp$ ve $M, M'' \in \wp \Rightarrow M' \in \wp$ olması özelliğine sahiptir. A' de filtre edilmiş tümevarım limiti altında kapalıdır. Herhangi bir sonlu $\pi_0\mathbf{H}$ modülü bileşke seriye sahiptir böylece bu modül A'dedir ve ayrıca herhangi bir $\pi_0\mathbf{H}$ burulma modülü de A' dedir. Eğer M, $\mathbf{Q}$ üzerindeki vektör uzayı ise, bu taktirde $M \in \mathbf{C}$, çünkü $q < 0$ için $H^q\left(\mathbf{G}, M\right) = 0$. Spektral dizinin Önerme 2.2 (c) profinite grubu durumuna indirgenmesini kullanarak aynı durum elde edilebilir. Eğer M ; serbest burulma ise ikinci ikilisi A' ye ait olmak üzere $0 \to M \to M \otimes \mathbf{Q} \to M \otimes \left(\mathbf{Q/Z}\right) \to 0$ tam dizisi vardır. Böylece $M \in \wp$. Sonuç olarak eğer M_t; M ' nin burulma alt grubu ise ispata sahip olmakla birlikte $0 \to M_t \to M \to M / M_t \to 0$ tam dizisi $M \in \wp$ olduğunu gösterir. Böylece (ii) ispatlanmıştır. Sonuç için teoremi kısaltırız: $\mathbf{G} \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathbf{G} \times_{\mathbf{H}} \mathbf{H}^{\Delta(1)} \xrightarrow{\mathrm{p}} \mathbf{H}$ duali standart yolundaki f dönüşüm fanktörü devirli dönüşüm yapısına eşlenir. i ; homotopi denkliğidir böylece $\pi_0 f$; örten ve onun fibrasyonu ve p ' de örten iken H^* (Önerme 2.2 (b)) ve π_* üzerindeki izomorfizimleri üretir. Böylece f 'nin örten olduğunu kabul edebiliriz.

$\mathbf{R}$ = ***Çek*** f olsun ve

$$E_2^{pq} = H^p\left(\mathbf{H}, H^q\left(\mathbf{R}, M\right)\right) \Rightarrow H^{p+q}\left(\mathbf{G}, M\right) \tag{2.7}$$

Serre spektral dizisini göz önüne alalım.

Eğer (i) sağlanırsa, bu taktirde $q < n$ için $\pi_q\mathbf{R} = 0$ olur. Eğer biz M 'yi indirgenemez $\pi_0\mathbf{H}$ modülü olarak alırsak bu durumda bir k için $\pi_0\mathbf{R}$ modülünde olduğu gibi $M \cong \left(\mathbf{Z}/p\right)^k$ olur. Sonuç olarak; $q = 0$ ve $0 < q < n$ için $H^q\left(\mathbf{R}, M\right) = M$ elde edilir. Böylece (2.7) spektral dizisi (iii)' ü verir.

Şimdi (ii)'nin sağlandığını kabul edelim ve tüm abelyen grupları ve $0 < q < s$ için $H^q\left(\mathbf{R}, A\right) = 0$ olacak şekilde $0 < s < n$ şartını sağlayan en büyük tamsayı olsun. Bu taktirde (2.7)' den tüm $\pi_0\mathbf{H}$ modül M için

$H^0\left(\mathbf{H}, H^s\left(\mathbf{R}, M\right)\right) = 0$ olduğunu gösteren

$H^s\left(\mathbf{H},M\right)\longrightarrow H^s\left(\mathbf{G},M\right)\to H^0\left(\mathbf{H},H^s\left(\mathbf{R},M\right)\right)\to H^{s+1}\left(\mathbf{H},M\right)\xrightarrow{\subset} H^{s+1}\left(\mathbf{G},M\right)$ tam dizisini elde ederiz.

A abelyen grubu verilmiş olsun, M özdeş alt grubu üzerindeki modül gibi görülen A'dan elde edilen $\pi_0\mathbf{H}$ modülü olsun. Şu halde sağ dönüşüm yoluyla $\pi_0\mathbf{H}$; $\pi_0\mathbf{H}/\mathbf{U}^n$ üzerinde hareket etmek üzere $\mathrm{M}=\lim\limits_{\vec{\mathrm{U}}}\left\{\text{dönüşüm cümleleri}: \pi_0\mathbf{H}/\mathbf{U}\to \mathrm{A}\right\}$ olur ve böylece

$$\mathrm{H}^0\left(\mathbf{H},\mathrm{H}^s\left(\mathbf{R},\mathrm{M}\right)\right)=\lim_{\vec{\mathrm{U}}}\mathrm{H}^0\left(\mathbf{H},\left\{\text{dönüşüm cümleleri}:\pi_0\mathbf{H}/\mathbf{U}\to \mathrm{H}^s\left(\mathbf{R},\mathrm{A}\right)\right\}\right)$$

$$=\lim_{\vec{\mathrm{U}}}\left\{\mathrm{f}:\pi_0\mathbf{H}/\boldsymbol{U}\to \mathrm{H}^0\left(\mathbf{R},\mathrm{A}\right)/\,\mathrm{f};\ \text{tüm } \mathrm{y}\in\pi_0\mathbf{H} \text{ için } \mathrm{f}\left(\mathrm{xy}\right)=\gamma^{-1}\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right) \text{ olacak şekilde cümle dönüşümüdür.}\right\}$$

$$=H^s\left(\mathbf{R},A\right).$$

Böylece $s=n$ olduğunu gösteren tüm abelyen A grupları ve $0\le q\le s$ için $H^q\left(\mathbf{R},A\right)=0$ olur. Özellikle Önerme 2.2 (d)' den

$$H^1\left(\mathbf{R},A\right)=Homcont\left(\pi_0\mathbf{R},A\right)=0 \tag{2.8}$$

olduğu görülür. Böylece $\pi_0\mathbf{R}=0$ çünkü $\pi_0 f$ izomorfizimdir ve böylece $\pi_0\mathbf{R}=Eşçek\pi_1 f$ abelyendir. Sonuçtan $q<n$ için $\pi_q\mathbf{R}=0$ olur ve (i)' yi elde etmiş oluruz.

SONUÇ 2.6'NIN İSPATI: $\pi_0\mathbf{R}=0$ durumundaki gibi $E\mathbf{R}$ terslenebilir olmak üzere $1\to\Omega\mathbf{R}\to E\mathbf{R}\to\mathbf{R}\to 1$ bir kanonik tam dizisi vardır (formüller için [3]'ye bakınız). Bu $E_2^{pq}=H^p\left(\mathbf{R},H^q\left(\Omega\mathbf{R},A\right)\right)\Rightarrow H^{p+q}\left(1,A\right)$ spektral dizisini üretir. +

Bunu kullanarak $\pi_0\Omega\mathbf{R}=\pi_1\mathbf{R}$' nin abelyen olması durumunu elde ederiz ve (2.8) formülü n' deki tümevarım yoluyla sonucu elde ederiz. Simplişıl $pro-p$ grupları için Whitehead teoremi aşağıdaki şekilde güçlendirilebilir:

SONUÇ 2.9: $f:\mathbf{G}\to\mathbf{H}$; simplişıl $pro-p$ grupların dönüşümü ve $n\ge 0$ olsun. Aşağıdaki şartlar birbirine denktir:

(i) $q<n$ için $\pi_q f$ bir izomorfizimdir ve $q=n$ için $\pi_q f$ örtendir.

(ii) $q\le n$ için $H^q\left(f,\mathbf{Z}/p\right)$ bir izomorfizimdir ve $q=n+1$ için de $H^q\left(f,\mathbf{Z}/p\right)$ birebirdir.

İSPAT: $H^1\left(G,Z/p\right)=Homcont\left(\pi_0 G,\mathbf{Z}/p\right)=H^1\left(\pi_0 G,\mathbf{Z}/p\right)$ olduğu zaman $H^1\left(f,\mathbf{Z}/p\right)$'nin birebirliği; $n=0$ durumunun sonucun ispatı olduğu $\pi_0 f$' nin örtenliğini gösterir. (Serre [3], p.1-35, Önerme 2.3) Eğer $n\ge 1$ ise, bu taktirde Whitehead teoremini uygulayabiliriz. Öncelikle biz biliyoruz ki (ii), $\pi_0 f$ 'nin izomorfizim olmasını gerektirir. $\pi_0 f$ 'nin örten olduğunu biliyoruz ve böylece f 'yi teoremin ispatındaki gibi bir örtenlikle yer değiştirdiğimiz zaman f 'nin örten olduğunu kabul edebiliriz. Eğer $\mathbf{R}=Çek\, f$ ise, bu taktirde

$$H^{1}\left(\mathbf{H},\mathbf{Z}/p\right)\longrightarrow H^{1}\left(\mathbf{G},\mathbf{Z}/p\right)\to H^{0}\left(\mathbf{H},H^{1}\left(\mathbf{H},\mathbf{Z}/p\right)\right)\to H^{2}\left(\mathbf{H},\mathbf{Z}/p\right)\xrightarrow{\subset}H^{2}\left(\mathbf{G},\mathbf{Z}/p\right)$$

beş terimli tam dizisi mevcuttur. Böylece $H^{0}\left(\mathbf{H},H^{1}\left(\mathbf{R},\mathbf{Z}/p\right)\right)=0$ olur. Fakat $pro-p$ grubunun sıfırdan farklı p-asal modülü üzerindeki etkisi sıfırdan farklı değişmezlere sahiptir. Böylece $H^{1}\left(\mathbf{R},\mathbf{Z}/p\right)=0$ ve $\pi_{0}\mathbf{R}=0$ olur.

KAYNAKLAR

1. Curtis, E.B., Some Relations Between Homotopy and Homology, *Ann. of Math.*, **83**, 386-413, 1965.
2. Rector, D.L., An Unstable Adams Spectral Sequence, *Topology,* **5**, 343-346, 1966.
3. Serre, J.P., Cohomologie Galoisienne, *Lecture Notes in Mathematics*, No. **5**, Springer, 1964.
4. Kan, D. M., On Homotopy Theory and c.s.s. Groups, *Ann. of Math.,* **68**, 38-53, 1958.
5. May J.P., Simplişıl Objects in Algebraic Topology, Math Studies **11**, *Van Nostrand, Princeton*, 1967.
6. Curtis, E.B., Lower Central Series of Semisimplişıl complexes, *Topology* , **2** , 159-171, 1963.
7. Gabriel, P. and Zisman, M. Calculus of fractions and homotopy theory, Springer, Berlin, 1966.
8. Quillen, D.G., Spectral Sequences of a Double Semi-Simplişıl Group, *Topology,* **5,** 155-157, 1966.
9. Quillen, D.G., Homotopical Algebra, *Lecture Notes in Mathematics*, No.**43**, Springer, 1967.
10. Serre, J.P., Groupes d'homotopy et classes de groupes abelians, *Ann. of Math.,* **58**, 258-294, 1953.