GRİFFİTS PROBLEMİ ÜZERİNE

An investigation on the Griffits's problem

Binali MUSAYEV*,Nizami MUSTAFAYEV*

ÖZET

Bu çalışmada doğrusal çatlaklı elastiki düzlemde çatlağın kenarlarındaki moleküllerin çekme kuvvetlerinin dikkate alınmasıyla çatlağın genişlenmesi probleminin denk olduğu singüler integro-diferansiyel denklemin bir tek sıfır çözümünün varlığı ispatlanmıştır.

SUMMARY

İn this study, it has been confirmed that there is one zero solution in the singular integro-diferantial equation which is equivalent for the problem of slit widening, with consideration of attraction forces of molecules on the edge of linear slit on the elastic surface.

1.GİRİŞ

1

Bilindiği gibi [1] doğrusal çatlaklı elastiki düzlemde çatlağın kenarlarındaki moleküllerin çekme kuvvetleri dikkate alınarak çatlağın genişlenmesi probleminin çözümü

$$\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{r'(t)}{t-x}dt=\frac{1}{g(1)}[1+r(x)]g[1+r(x)]-p,|x|\leq 1 \qquad (1)$$

şekilli lineer olmayan singüler integro-diferansiyel denklemin

$$r(\pm 1)=r'(\pm 1)=0 \qquad (2)$$

koşullarını sağlayan çözümüne dönüştürülür. Burada p sonsuzluktaki etki kuvvetinin değeri $(\sigma_y = p = const)$, $r(x)$ çatlağın genişlenmesini karakterize eden büyüklük, g(x) de $[0,+\infty)$ aralığında tanımlı g(0)=1 değerinden $g(+\infty)$=0 değerine kadar monoton azalan olup azalma hızı $x^{-\alpha}$ $(\alpha > 2)$ fonksiyonundan az olmayan ve

$$g(0)=1\ ,\ g(1)+g'(1)=0 \qquad (3)$$

koşullarını sağlayan fonksiyondur.

Denklem (1)'deki singüler integral operatör $r'(\pm 1)=0$ koşullarıyla çevrildiğinde [2]

1*Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, KÜTAHYA

$$p=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f[r(t)]}{\sqrt{1-t^2}}dt,\quad f[r(x)]=\frac{1}{g(1)}[1+r(x)]g[1+r(x)] \tag{4}$$

olmak üzere (1)'e denk olan

$$r'(x)=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{f[r(t)]dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}\ ,\quad |x|\le 1 \tag{5}$$

integro-diferansiyel denklem elde edilir. Denklem (5), r(-1)=0 koşuluyla

$$r(x)=\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}K(x,t)f[r(t)]dt\ ,\qquad |x|\le 1 \tag{6}$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemine dönüştürülür. Burada

$$K(x,t)=\ln\frac{|t-x|}{1-xt+\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}-\frac{\left(\arcsin x+\frac{\pi}{2}\right)t-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-t^2}}$$

dir.Bulunan r(x) için (2)koşulları açık olarak

$$r(-1)=0,\quad r'(\pm 1)=0,\quad r(1)=-\frac{1}{\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{tf[r(t)]}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{7}$$

koşullarına dönüştürülür.

Böylece (6) lineer olmayan Fredholm integral denkleminin r(x) çözümünün (2) koşullarını sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\int_{-1}^{1}\frac{t.f[r(t)]}{\sqrt{1-t^2}}dt=0 \tag{8}$$

koşulunun sağlanması olduğu (6) ve (7)'den açıktır.Dolayısıyla,(1) denkleminin (2) koşullarını ve (6) denkleminin de (4) ve (8) koşullarını sağlayan çözümlerinin bulunması birbirine denk olduğu görülür.

Eğer (6) denkleminin çözümünü [-1,1] aralığında çift fonksiyonlar sınıfında ararsak (8) koşulu sağlanacaktır.Dolayısıyla,[-1,1] aralığında çift fonksiyonlar sınıfında (6) denkleminin (4) ve (8) koşullarını sağlayan çözümü

$$M(x,t)=\ln\frac{|t-x|}{1-xt+\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-t^2}} \tag{9}$$

olmak üzere lineer olmayan

$$r(x)=\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}M(x,t)f[r(t)]dt, \qquad |x|\le 1 \tag{10}$$

Fredholm integral denklemin (4) koşulunu sağlayan çözümüne denk olacaktır.

Denklem (10)'un [-1,1] aralığında çift fonksiyonlar sınıfında bir r(x) çözümü bulunduğunda p büyüklüğü (4) ifadesinden bulunabilir.İleride (10) denkleminin [-1,1] aralığında çift fonksiyonlar sınıfında çözümünün varlığı ve tekliğini inceleyeceğiz.

TANIM 1[3]. E Banach uzayı ve boş olmayan kapalı konveks bir $K \subset E$ kümesi verilsin.Eğer herhangi $x \in K$ ve $x \neq 0$ için $\alpha \geq 0$ iken $\alpha x \in K$ ve α <0 iken $\alpha x \notin K$ ise K kümesine E uzayında bir konik denir. E'deki her K koniği E üzerinde bir "π" kısmi sıralama bağıntısı tanımlar, yani $x, y \in E$ için $x \,\pi\, y$ ise $y - x \in K$ dır.

TANIM 2 [3]. E Banach uzayı, $K \subset E$ koniği ve E Banach uzayında tanımlı lineer olmayan B operatörü verilsin.Eğer $M \subset E$ için $BM \subset K$ ise B operatörüne M üzerinde negatif olmayan ve $x, y \in M$, $x \,\pi\, y$ için $Bx \,\pi\, By$ ise B operatörüne M üzerinde monoton operatör denir.

$H_\alpha[-1,1]$, $[-1,1]$ aralığında tanımlı 0<$\alpha \le 1$ üstü ile Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonların vektör uzayı olsun. Bu uzay $\|.\|_\alpha = \|.\|_\infty + H(.;\alpha)$ normuna göre bir Banach uzayıdır [2]. Burada

$$H(r;\alpha)=\sup\left\{\frac{|r(x_2)-r(x_1)|}{|x_2-x_1|^\alpha};x_1,x_2\in[-1,1]\right\}, \|r\|_\infty=\max\{|r(x)|;x\in[-1,1]\}$$

dir.

$H_\alpha[-1,1]$ uzayını kısaca H_α ile göstereceğiz. H_α uzayının $[-1,1]$ aralığının uç noktalarında sıfır değerini alan fonksiyonlarından oluşan alt uzayı $\overset{0}{H}_\alpha$ ve $\overset{0}{H}_\alpha$ nın $[-1,1]$ aralığında negatif değer almayan fonksiyonlarından oluşan alt kümesi $\overset{0}{H}{}^{+}_\alpha$ olsun. $\overset{0}{H}_\alpha$ uzayında $\|.\|_{\alpha,0} = H(.;\alpha)$ şeklinde tanımlanan $\|.\|_{\alpha,0}$ normu ile $\|.\|_\alpha$ normunun denk oldukları açıktır. $\overset{0}{H}{}^{+}_\alpha$ kümesinin $[-1,0]$ aralığında monoton artan ve $[0,1]$ aralığında monoton azalan çift fonksiyonlarından oluşan alt kümesi K_α^+ olsun.

K_α^+ kümesinin $\overset{0}{H}_\alpha$ uzayında bir konik olduğu açıktır. α sayısının $0<\alpha<\frac{1}{2}$ şartını sağladığı farz edilir.

$C[-1,1]$, $[-1,1]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonların vektör uzayı olmak üzere $X=\left(C[-1,1],\|\cdot\|_\infty\right)$ olsun. Tanım kümesi $D(A)=\overset{0}{H}_\alpha$ olan bir $A_\lambda : X \to X$ operatörünü

$$A_\lambda : r \to \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1} M(x,t)f[r(t)]dt = A_\lambda r(x), \qquad |x|\leq 1 \qquad (11)$$

biçiminde tanımlayalım. Burada M(x,t) (9) ve $f[r(x)]$ de (4) nolu ifadelerle tanımlanan fonksiyonlardır.

$K_\alpha^- = \left\{ r \in \overset{0}{H}_\alpha : -r \in K_\alpha^+ \right\}$ olsun. K_α^- kümesinin $\overset{0}{H}_\alpha$ uzayında bir konik olduğu açıktır. M_λ lineer operatörünü $\overset{0}{H}_\alpha$ uzayında

$$M_\lambda r(x) = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1} M(x,t)r(t)dt, \qquad |x|\leq 1 \qquad (12)$$

şeklinde tanımlayalım.

2. Denklem (10)'un çözümü hakkında

Öncelikle A_λ ve M_λ operatörlerinin çeşitli özelliklerini ifade eden birkaç lemmayı verelim.

LEMMA 1. $g:[0,+\infty)\to R_+$ (R_+ - negatif olmayan reel sayılar kümesidir) fonksiyonu $[0,+\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olup azalma hızı $x^{-\alpha}$ (x > 2) fonksiyonundan az olmayan, monoton azalan, sürekli diferansiyellenebilir ve $\|g'\|_\infty < \infty$ olsun. Bu taktirde A_λ operatörü K_α^+ koniğini kendine dönüştürür, yani $A_\lambda K_\alpha^+ \subset K_\alpha^+$ olur.

İspat: Herhangi $x\in[-1,1]$ için

$$\tau_r(x) = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1} M(x,t)f[r(t)]dt, \qquad |x|\leq 1$$

olsun. Bu durumda önce herhangi $r\in K_\alpha^+$ için $\tau_r(x)$ fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığında çift fonksiyon olduğunu görelim.

$\tau_r(\pm 1)$=0 olduğu açıktır. Herhangi $x,t \in [-1,1]$ için $M(x,t) = M(-x,-t)$ ve herhangi $r \in K_\alpha^+$ için $f[r(t)]$ çift fonksiyon olduğundan $x \in [-1,1]$ için $\tau_r(x) = \tau_r(-x)$ olduğu ve dolayısıyla $\tau_r(x)$ fonksiyonunun çift fonksiyon olduğu görülür.

Şimdi de $\tau_r(x)$ fonksiyonunun $[-1,0]$ aralığında monoton artan ve $[0,1]$ aralığında monoton azalan olduğunu gösterelim. Bu nedenle $\tau_r(x)$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında çift fonksiyon olduğundan onun $[0,1]$ aralığında monoton azalan olduğunu göstermek yeterlidir.

Herhangi $x \in (0,1)$ için

$$\tau_r'(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{f[r(t)]}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}dt$$

olur. Öte yandan her $x \in [-1,1]$ için

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} = 0$$

olduğundan $\forall x \in (0,1)$ için

$$\tau_r'(x) = -\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi\lambda}\int_{0}^{1}\frac{f[r(t)]-f[r(x)]}{(t-x)(t+x)\sqrt{1-t^2}}dt$$

biçiminde yazılabilir. Buradan $g(u)$ ve $r(x)$ fonksiyonları üzerine olan hipotez gereğince $f[r(x)]$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında monoton artan olacağından $\forall x \in (0,1)$ için $\tau_r'(x)$ < 0 olduğu ve dolayısıyla $\tau_r(x)$ fonksiyonunun $(0,1)$ aralığında monoton azalan olduğu elde edilir.

$\tau_r(\pm 1)$=0 ve $\tau_r(x)$ fonksiyonu $(-1,0)$ aralığında monoton artan ve $(0,1)$ aralığında monoton azalan olduğundan $x_0 = 0$, $(\tau_r'(0) = 0)$ noktası $\tau_r(x)$ fonksiyonu için maksimum nokta ve $\tau_r(0) > 0$ olacaktır. Dolayısıyla $\forall x \in [-1,1]$ için $\tau_r(x) \geq 0$ olur.

Şimdi $\forall r \in K_\alpha^+$ için $\tau_r \in H_\alpha$ olduğunu görelim. Herhangi $x \in [-1,1]$ için

$$\tau_r'(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{G(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}dt, \qquad G(t) = f[r(t)] - f(0)$$

biçiminde yazılabilir. $G \in \overset{0}{H}_{\alpha}$ olduğu açıktır.

Herhangi $\varphi \in \overset{0}{H}_{\alpha}$ fonksiyonu için

$$\|\varphi\|_{\infty} \le 2^{\alpha}.\|\varphi\|_{\alpha,0}$$

ve $\|\Im\|_{\alpha,0}$ sınırlı lineer [2], [4]

$$\Im\vartheta(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\vartheta(t)dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} : \overset{0}{H}_{\alpha} \to \overset{0}{H}_{\alpha}$$

operatörünün normu olmak üzere

$$\|\tau_r'\|_{\alpha,0} \le \frac{g(1) + \left(1 + 2^{\alpha}\|r\|_{\alpha,0}\right)\|g'\|_{\infty}}{\lambda g(1)}\|\Im\|_{\alpha,0}.\|r\|_{\alpha,0} \tag{13}$$

olduğu elde edilir.Ayrıca herhangi $x_1, x_2 \in [-1,1]$ için,

$$|\tau_r(x_1) - \tau_r(x_2)| \le \|\tau_r'\|_{\infty}.|x_1 - x_2| \le 2^{1-\alpha}\|\tau_r'\|_{\infty}.|x_1 - x_2|^{\alpha}$$

ve buradan da

$$\|\tau_r\|_{\alpha,0} \le 2^{1-\alpha}\|\tau_r'\|_{\infty} \le 2.\|\tau_r'\|_{\alpha,0}$$

yazılabilir.(13) nolu eşitsizlik bu son eşitsizlikte dikkate alındığında

$$\|\tau_r\|_{\alpha,0} \le \frac{2\left[g(1) + \left(1 + 2^{\alpha}\|r\|_{\alpha,0}\right)\|g'\|_{\infty}\right]}{\lambda g(1)}\|\Im\|_{\alpha,0}\|r\|_{\alpha,0} \tag{14}$$

olur. Buradan da $\tau_r \in H_{\alpha}$ ve dolayısıyla $\tau_r \in K_{\alpha}^{+}$ olduğu görülmektedir.

Aşağıda M_{λ} operatörünün özelliklerini ifade eden iki lemma ispatları lemma 1 in ispatına benzer olduğundan ispatsız verilir.

LEMMA 2. Formül (12) yardımıyla tanımlanan M_λ operatörü K_α^- koniğini K_α^+ koniğine dönüştürür, yani $M_\lambda K_\alpha^- \subset K_\alpha^+$.

LEMMA 3. M_λ operatörü K_α^+ koniğini K_α^- koniğine dönüştürür, yani $M_\lambda K_\alpha^+ \subset K_\alpha^-$.

LEMMA 4. Eğer $g:[0,+\infty) \to R_+$ fonksiyonu için Lemma 1 in koşulları sağlanıyorsa, (11) nolu formül yardımı ile tanımlanan A_λ operatörü K_α^+ koniği üzerinde monotondur.

İspat : Herhangi $r_1, r_2 \in K_\alpha^+$ için $r_1 \;\pi\; r_2$ ise $A_\lambda r_1 \;\pi\; A_\lambda r_2$ olduğunu gösterelim. Herhangi $t \in [-1,1]$ için $\varphi(t) = f[r_2(t)] - f[r_1(t)]$ fonkisiyonuna bakalım.

Burada $f[r(x)] = \dfrac{1}{g(1)}[1 + r(x)]g[1 + r(x)]$ dir. $\varphi \in H_\alpha$, $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ ve herhangi $t \in [-1,1]$ için $\varphi(t) = \varphi(-t)$ olduğu açıktır. $g(x)$ fonksiyonu üzerine olan hipotez gereğince $\varphi(t)$ fonksiyonunun ifadesinden herhangi $t \in [-1,1]$ için $\varphi(t) \le 0$ olduğu görülür.

Herhangi $t \in [-1,1]$ için

$$\varphi(t) = f'[r_1(t) + \theta(r_2(t) - r_1(t))][r_2(t) - r_1(t)] \qquad , \qquad \theta \in (0,1)$$

şeklinde yazılabilir. $r_1(t) + \theta[r_2(t) - r_1(t)]$, $0 < \theta < 1$ fonksiyonu, t değişkenine göre $[0,1]$ aralığında ve $f'(u)$ fonksiyonu da, g fonksiyonu üzerine olan hipotez gereğince monoton azalan ve pozitif olmayan fonksiyon olduğundan $-f'[r_1(t) + \theta(r_2(t) - r_1(t))][r_2(t) - r_1(t)]$ fonksiyonu monoton azalan ve negatif olmayan iki fonksiyonun çarpımı gibi $[0,1]$ aralığında monoton azalandır.Dolayısıyla, $\varphi(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında monoton artandır. $\varphi(t)$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında çift fonksiyon olduğundan $[-1,0]$ aralığında azalandır.Böylece $\varphi \in K_\alpha^-$ olduğu gösterildi. $A_\lambda r_2 - A_\lambda r_1 = M_\lambda \varphi$ olduğundan Lemma 2 gereğince $A_\lambda r_2 - A_\lambda r_1 \in K_\alpha^+$, yani A_λ operatörü monotondur.

LEMMA 5. Eğer $g:[0,+\infty) \to R_+$ fonksiyonu için Lemma 1 in koşulları sağlanıyorsa, herhangi $a \in (0,1)$ ve herhangi $r \in K_\alpha^+$ için $A_\lambda : K_\alpha^+ \to K_\alpha^+$ operatörü

$$A_\lambda(a,r) \;\pi\; aA_\lambda r$$

koşulunu sağlar.

İspat : Herhangi $a \in (0,1)$ için

$$\varphi(t) = a.f[r(t)] - f[a.r(t)] - af(0) + f(0), \qquad -1 \le t \le 1$$

olmak üzere,

$$a.A_\lambda r(x) - A_\lambda a.r(x) = M\varphi(x), \qquad -1 \le x \le 1 \qquad (15)$$

yazılabilir.

Herhangi $r \in K_\alpha^+$ ve $\forall a \in (0,1)$ için $aA_\lambda r - A_\lambda ar \in K_\alpha^+$ olduğunu görelim. Bunun için Lemma 2 gereğince $\varphi \in K_\alpha^+$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\varphi \in H_\alpha$, $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ ve herhangi $t \in [-1,1]$ için $\varphi(t) = \varphi(-t)$ olduğu açıktır. $\varphi(t)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında monoton artan ve $[-1,0]$ aralığında monoton azalan olduğunu gösterelim. Bu nedenle $\varphi(t)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında monoton artan olduğunu göstermek yeterlidir.Hipotez gereğince $a.f(z) - f(a.z) - af(0) + f(0)$ fonksiyonu $[0,+\infty)$ aralığında monoton azalan olacaktır. ($\forall z \in (0,+\infty)$ için $[a.f(z) - f(az) - a.f(0) + f(0)]_z' = \alpha[f'(z) - f'(az)] < 0$ olur). O yüzden $0 \le t_1 < t_2 \le 1$ için $r(t_1) > r(t_2)$ olduğundan ,

$$a.f[r(t_1)] - f[a.r(t_1)] - a.f(0) + f(0) < a.f[r(t_2)] - f[a.r(t_2)] - a.f(0) - f(0),$$

yani $\varphi(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında monoton artandır. $\varphi(t)$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında çift fonksiyon olduğundan $[-1,0]$ aralığında monoton azalan fonksiyon olacaktır. O zaman herhangi $t \in [-1,1]$ için $\varphi(t) \le \varphi(1) = 0$, yani $\varphi(t) \le 0$ olduğu elde edilir.

Böylece, $\varphi \in K_\alpha^-$ olduğu ispatlandı. Bu da Lemma 2 gereğince $aA_\lambda r - A_\lambda ar \in K_\alpha^+$, yani $A_\lambda a.r \ \pi \ a.A_\lambda r$ olduğunu gösterir.

LEMMA 6. Eğer $g : [0,+\infty) \to R_+$ fonksiyonu için Lemma 1 in koşulları sağlanıyorsa, her hangi $a \in [1,+\infty)$ ve her hangi $r \in K_\alpha^+$ için $A_\lambda : K_\alpha^+ \to K_\alpha^+$ operatörü

$$A_\lambda a.r \ \phi \ a.A_\lambda r$$

koşulunu sağlar.

İspat : Her hangi $a \in [1,+\infty)$ ve herhangi $r \in K_\alpha^+$ için (15) formülü kullanılarak Lemma 5 in ispatına benzer olarak $\varphi \in K_\alpha^+$ olduğu gösterilebilir. O taktirde Lemma 3 gereğince $M_\lambda \varphi \in K_\alpha^-$, yani herhangi $a \in [1,+\infty)$ ve herhangi $r \in K_\alpha^+$ için

$A_\lambda a.r \;\phi\; a.A_\lambda r$ olur. Bu Lemma 6 yı ispatlar.

Şimdi (10) denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği hakkında aşağıdaki esas teoremi ifade ve ispat edelim.

TEOREM. Eğer $g:[0,+\infty \to R_+)$ fonksiyonu için Lemma 1'in koşulları sağlanmıyorsa, (10) lineer olmayan Fredholm integral denkleminin herhangi $\lambda > 0$ için K_α^+ koniğinde bir tek sıfır çözümü vardır.

İspat : $r(x)=0$ fonksiyonunun herhangi $\lambda > 0$ için (10) denkleminin bir çözümü olduğu açıktır. $r(x)=0$ fonksiyonunun herhangi $\lambda > 0$ için (10) denkleminin bir tek çözümü olduğunu gösterelim. Bunu olmayana ergi yöntemiyle ispatlayalım. Kabul edelim ki bir $\lambda = \lambda_0 > 0$ için $A_{\lambda_0} r = r$ denkleminin sıfırdan farklı bir $r_0 \in K_\alpha^+$ çözümü vardır.

Bu denklemi $\mu = \dfrac{\lambda_0}{2}$ olmak üzere $A_\mu r = r$ biçiminde yazalım. Lemma 4 ve Lemma 6 gereğince

$$
\begin{aligned}
&A_\mu^2 r_0 = A_\mu(A_\mu r_0) = A_\mu(2r_0) \;\phi\; 2A_\mu r_0 = 2^2 r_0 \quad , \\
&A_\mu^3 r_0 = A_\mu(A_\mu^2 r_0) \;\phi\; A_\mu(2^2 r_0) \;\phi\; 2^2 A_\mu r_0 = 2^3 r_0 , \qquad (16) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&A_\mu^n r_0 = A_\mu(A_\mu^{n-1} r_0) \;\phi\; A_\mu(2^{n-1} r_0) \;\phi\; 2^{n-1} A_\mu r_0 = 2^n r_0 , \\
&n \in N
\end{aligned}
$$

olur. $r_0(0) > 0$ olduğundan (16) eşitsizliklerinden

$$\lim_{n\to\infty} A_\mu^n r_0(0) = +\infty \qquad (17)$$

bulunur. Öte yandan,

$$A_\mu r_0(0) = \frac{2}{\pi\lambda_0} \int_{-1}^{1} \left[\ln \frac{1+1}{1+\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right] f[r_0(t)]dt$$

ve herhangi $t \in [-1,1]$ için $f[r_0(t)] \le f(0) = 1$ olduğundan

$$\left| A_\mu r_0(0) \right| \le \frac{4}{\lambda_0}$$

olur.

Benzer şekilde

$$A_\mu^2 r_0(0) = A_\mu\left(A_\mu r_0(0)\right) = \frac{2}{\pi\lambda_0}\int_{-1}^{1}\left[\ln\frac{1+1}{1+\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right] f\left[A_\mu\left(r_0(t)\right)\right]dt$$

ve herhangi $t \in [-1,1]$ için $f\left[A_\mu r_0(t)\right] \leq f(0) = 1$ olduğundan $\left|A_\mu^2 r_0(0)\right| \leq \frac{4}{\lambda_0}$,

dolayısıyla $\forall n \in N$ için $\left|A_\mu^n r_0(0)\right| \leq \frac{4}{\lambda_0}$ olduğu görülür ki bu da (17) ile bir çelişkidir.

Demek ki kabulümüz doğru değildir. Bununla teorem ispatlanır.

(10) denkleminin bulunan $r(x) = 0$ çözümüne göre (4)'ten p = 1 bulunur.

Kaynaklar dizini

1. **Aleksandrov, V.M. , Kudiş, İ. İ.** , Asimptotiçeskiye Metodı v zadaçe Griffitsa "Griffits Probleminde Asimtotik metotlar " Prikl. Mat. Mekh. 53, No 4, 1989.
2. **Musheli̇şvili, N.İ.**, Singulyarnıye İntegralnıye Uravneniya "Singüler İntegral Denklemler " , Nauka, Moskova, 1962.
3. **Krasnoselskiy, M.A., Zabreyko, P.P**, Geometriçeskiye Metodı Nelineynogo Analiza "Lineer Olmayan Analizin Geometrik Metotları ", Nauka, Moskova, 1975.
4. **Hüseynov. A. İ., Muhtarov. H.Ş.** , Vvedeniye v Teorii Nelineynıh Singulyarnıh İntegralnıh Uravneniy "Lineer olmayan Singuler İntegral Denklemler Teorisine Giriş", Nauka , Moskova,1980.