El Sanatları ve Matematik: Cebir Dünyasına Bakış

Zekeriya Karadağ[a] ve Gülseren Karagöz Akar[b]

Öz

Bixler (1980), matematik ve sanat ilişkisini tartışırken, matematikçi ve sanatçıların aynı fiziksel mekânı farklı tepkilerle yorumladığını ifade etmektedir. Sanatçı tepkisini, gördüğünü ve anladığını sanat ürünleriyle yorumlarken, matematikçinin çabası bu yorumları matematiksel bir dil ile anlatmaya çalışmak olmuştur. Matematik eğitimcileri olarak, bu çalışmada matematik eğitimi kaygısıyla eş zamanlı bir matematiksel yorum sunacağız. Özellikle el sanatları içinde yerleşik matematiği tartışacak ve el sanatlarının bize ilettiği mesajların içine yerleşmiş matematiği konuşurken, sıkça gördüğümüz desenlerin cebir ve cebirsel düşünmenin temel kavramlarından olan fonksiyon ve izometri kavramları ve bu kavramların arasındaki ilişkiye nasıl yer verdiğine değineceğiz. Bu bağlamda, örneklerle, dönüşüm ve izometri kavramlarını inceleyecek ve sonrasında da, izometri türleri başlığında, dönüşüm geometrisi fonksiyonları olan öteleme, yansıma, dönme ve kürüme fonksiyonlarını ele alacağız. Böylelikle, cebir kitaplarında bir takım semboller arasına sıkışıp kalmış olan izometri ve grup gibi cebirsel kavramlara el sanatları içinde karşılık bulmaya, bu kavramları deyim yerindeyse ete kemiğe büründürmeye çalışacağız. Bu çalışma gerçek hayattan alınmış örneklere dayanarak, lise matematik müfredatında yer alan öteleme-yansıma-dönme kavramlarının öğretimi bağlamında öğretmenlere ve üniversite seviyesinde geometri ve cebir öğretimi derslerinde öğretmen yetiştiricilerine katkı sunacaktır.

Anahtar kelimeler: El sanatları, fonksiyon, izometri, grup teorisi, matematik öğretimi

Makale Hakkında

Gönderim tarihi: 13.06.2019

Düzeltme tarihi: 15.06.2020

Kabul tarihi: 22.10.2020

Elektronik Yayın Tarihi: 17.12.2020

Giriş

El Sanatları

El sanatları ve buna bağlı olarak üretilen eserler bir bütün olarak ‘kültür ürünü’dür (Akpınarlı, Büyükyazıcı ve Kurt, 2010). İnsan eliyle oluşageldiğinden, insanın yaşama biçimini de gösteren göstergelerden biri olarak yaşam biçiminin nesilden nesile aktarılmasında büyük öneme sahiptir (Sarıkaya Hünerel ve Er, 2012). Ortadoğu ve Balkanlar coğrafyasını dikkate aldığımızda, çoğunlukla ebru, hat, tezhip gibi kâğıt ve

[a] *GeoGebra Institute of Canada, karadag.zekeriya@gmail.com*

[b] *Boğaziçi Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, gulseren.akar@boun.edu.tr, ORCID: 0000-0003-2342-5979*

türevleri üzerinde gördüklerimizin yanında altın, bakır ve gümüş gibi madenlerin işlenmesiyle ortaya konan sanatlar ve oymacılık, kakmacılık gibi tahta türü zeminlerin kullanıldığı sanatlar akla gelmektedir. Oya, dantel ve kumaş desenleri ve halı ve kilim süslemeleri de bu çerçevede ele alınabilir. Özellikle turistik bölgelerde en çok karşılaşılan fincan ve vazo gibi toprak ürünleri, sergilediği renk ve desenler nedeniyle en çok dikkat çeken ürünlerdendir (Şekil 1).

Şekil 1. Değişik renk ve desenlerle kaplı seramik ürünler

Bu bağlamda, el sanatları denilince genelde el ile veya el becerisinin ön planda olduğu basit el aletleri yardımıyla üretilen nesneler akla gelmektedir. Öte yandan, son zamanlarda teknolojinin gelişmesiyle, elde dokunmuş halı ve kilim örneklerinin sayısı fabrikasyon üretimlere oranla oldukça azalmıştır. Bu çalışmada el sanatları olarak değerlendirilen yöntemlerle üretilen nesnelerin üzerindeki süslemeler hakkında konuşulacaktır. Bu çalışma kapsamında amacımız, el sanatları üzerindeki süslemeler ve bu süslemelerin sergilediği matematikten yola çıkarak, temel dönüşümler (izometri) kavramının incelenmesidir. Bu sebeple, süslerin matematiğinden bahsederken karşılaşacağımız kavramların iyi anlaşılması için öncelikle dönüşüm geometrisi, izometri ve fonksiyon ve en son ise grup tanımlarına yer verilecektir. Ayrıca, müfredat ve daha önce yapılan çalışmalar ışığında, ilkokul, ortaokul ve lise matematik kavramları arasında yer alan geometrik dönüşümlerin anlaşılmasının önemi vurgulanacaktır. Bu bağlamda, bu çalışmanın öğrencilere ve öğretenlere izometri kavramını anlamlandırmada ve öğretim için kullanmada katkı sunacağını düşünmekteyiz.

Süslerin Matematiği

Bu çalışmada, belli bir kurala göre dizilmiş örneklerle ilgileneceğiz. Bu bağlamda, belli bir düzende dizilmiş elemanların oluşturduğu süslemeler olan tek boyutlu kuşak süslemeleri (freize groups) veya iki boyutlu kaplama süslemeleri (rosette groups) ve bu tarz süslemelerin içerdiği matematik konumuzun daha çok ilgi alanına girmektedir.

Fakat yine de konunun kapsamını sınırlı tutmak adına bu çalışmada sadece tek boyutlu kuşak süslemeleri incelenecektir (Detaylı bilgi için bkz. Hoggar, 2006). Daha ileri düzeyde bilgi almak isteyenler *S. G. Hoggar* tarafından yazılmış olan *Mathematics of Digital Images* kitabını veya kaynaklar bölümünde vereceğimiz diğer kaynakları inceleyebilirler.

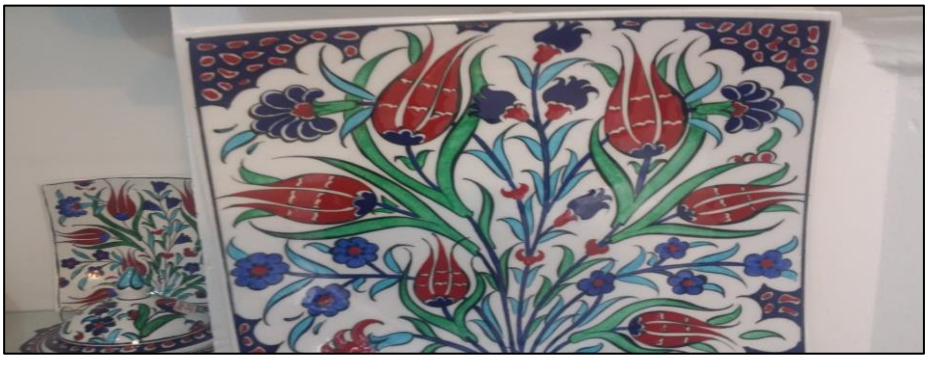
Kuşak süslemelerindeki matematiği incelerken, öncelikle dönüşüm ve izometri kavramları hakkında genel bir bilgi verecek ve bu kavramların ilkokul, ortaokul ve lise müfredatındaki yerine değinerek, matematik eğitimi literatüründe çalışmalar ışığında neden önemli kavramlar olduklarını tartışacağız. Sonrasında da, izometri türleri başlığı altında dönüşüm geometrisi fonksiyonları olan öteleme, yansıma, dönme ve kürüme fonksiyonlarını ele alacak ve kuşak süslemelerinde sıklıkla görebileceğimiz tek boyutlu süsleme örüntüleri (kuşak örüntüleri) kavramlarını inceleyeceğiz.

Burada kullanıldığı şekliyle süsleme ve örüntü terimleri benzer anlamlar içerse de, çalışmanın bundan sonraki kısımlarında süslemeyi daha genel anlamda, örüntüyü ise belli bir kurala göre dizilim olduğunda kullanacağız. Bu perspektiften bakıldığında, kuşak örüntüleri terimi, içerdiği matematik açısından daha doğru bir terim olmaktadır.

Dönüşüm ve İzometri Tanımları, Matematik Eğitimindeki Yeri

Bu kısımda, öncelikle dönüşüm ve izometri tanımlarına yer vererek, müfredattaki yerine değinecek ve matematik eğitimde yapılan çalışmalar eşliğinde bu kavramların neden önemli kavramlar olduklarını irdeleyeceğiz.

Dönüşüm, Bixler (1980) ve Hoggar (2006) tarafından bir noktayı veya bir nesneyi ya da en genel haliyle bir sistemi belli bir ilk durumdan belli bir son duruma dönüştürme işlemi, fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. Dönüşüm bir fonksiyondur çünkü dönüştürdüğü bütün noktaları yalnız ve yalnız bir tek görüntü noktasına eşler. Dönüşüm sırasında şeklin boyutları değişmemekte ve hatta şeklin özellikleri (örn, uzunluk, açı, alan, vb.) korunmaktadır.



Şekil 2. Çini üreten ve satan yerlerin çoğunda yaygın olarak görülebilecek bir çini tasarımı

Şekil 2'de görülen duvar tabağındaki çini örneğindeki lale belli bir dönüşüm fonksiyonu etkisiyle bir durumdan başka bir duruma dönüşürken büyüklüğünde, tabak üzerindeki konumunda ve yöneliminde bir değişim bulunmaktadır. Benzer değişim mavi yapraklarda ve diğer çiçeklerde de görülmektedir. Ebru ve çini uygulamalarında sıklıkla bu şekilde boyut değişikliğine rastlamamızın nedeni, bu uygulamalarda çalışılan alanı tam olarak doldurma ve nesneleri belli bir alana sığdırma amacının etkisi olabilir. Ayrıca dönüştürülmüş nesnelerin mükemmel bir şekilde dönüştürülmüş olduğunu söylemek her zaman mümkün olmamaktadır. Dönüşümler sırasında göze çarpabilecek bu tür küçük farklılıkları, matematiksel genelleme yapabilmek adına dikkate almayacağız çünkü bu eserlerin yapımında esas amacın daha estetik olma ve çalışılan alanı doldurma olduğunu düşünüyoruz.

Örneğin, şekil 3'te görüldüğü gibi Katar müzeleri koleksiyonundan olan bu tacın fotoğrafı İstanbul Sultanahmet'teki Türk İslam Eserleri Müzesi'nde Ocak 2016 tarihinde yapılan inci sergisi sırasında çekilmiştir. Tanıtım yazılarında, altın, gümüş ve doğal Körfez incilerinden yapıldığı bildirilen bu tacın Galler prensesi Diana'nın üvey annesi olan kontes tarafından ve prensesin kendisi tarafından da takıldığı bildirilmektedir.

Şekil 3. Kontes Spencer'in incili tacı

Özellikle çini ve ebru uygulamalarında görülen bu esnekliğin aksine, izometri tanımı boyut değişikliğine izin vermemektedir. İzometri, uzunlukları koruyan bir dönüşüm fonksiyonudur (Baker, 2005; Hoggar, 2006). Yani, düzlem üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklığın değeri dönüşüm sonucunda değişmez. Bunun doğal sonucu olarak, dönüşüme uğrayan nesnelerin boyutları ve hatta açıların değerleri de değişmez, ama açıların işaretleri yani şeklin yönelimi değişebilir.

Bu tanıma uyan bir taç da, yine aynı sergide fotoğraflanan Lady Roseberry'nin tacıdır (Şekil 4). Tanıtım bilgilerinde, bilinen en sıra dışı incili taç olduğu ve doğal inci ve eski tarz kesimli pırlantalardan oluştuğu verilmektedir. İncilerinin Büyük (Pasifik) Okyanusu incilerinden toplandığı da verilen bilgiler arasında olan bu tacın süslemelerinde boyut değişimi olmamış ama oturduğu silindirik yüzey nedeniyle yönelimde bir farklılık olmuştur. Eğer bu silindirik yüzeyden kaynaklanan yönelim farkını ihmal ederek dizilimi doğrusal kabul edilirse, "taç üzerinde görülen iki farklı motif Hoggar (2006) tarafından r_1 kodu ile tanımlanan öteleme izometrisi dizilimini göstermektedir", denilebilir.

Şekil 4. Lady Roseberry'nin incili tacı

Burada ele alınan izometri tanımı sadece iki boyutlu uzay olan düzlem için değil, üç boyutlu uzay için ve hatta daha yüksek boyutlu uzaylar için de geçerlidir. Yani burada söz konusu olan uzaklık kavramı dört ve daha yüksek boyutlar için bizim anladığımız fiziksel anlamda uzaklık kavramının ötesine geçmektedir. Diğer boyutlardaki izometrilerden söz açılmışken konu ile ilgili çalışmaların tarihçesinden de bahsedelim.

İzometri konusunun tarihçesiyle ilgili bilgileri özetleyen Bixler (1980), Fedorov'un 1890 yılında üç boyutlu uzayda var olan 230 tane izometri örüntüsü tanımladığını yazmıştır. George Polya'nın 1924 yılında iki boyutlu uzayda 17 tane izometri örüntüsü olduğunu ispatlayabildiğini ama bu örüntülerin neler olduğunu tanımlayanın ise aynı yıl içindeki çalışmalarıyla Paul Niggli olduğunu ifade eden Bixler (1980), kuşak örüntülerinde (tek boyutlu uzayda) toplam yedi tane izometri örüntüsünün varlığından söz etmektedir. Kuşak örüntülerinde tespit edilen yedi tane örüntünün varlığını yedi farklı izometri türü olarak algılamamalıdır. Baker (2005) tarafından da belirtildiği gibi temelde üç tane izometri türü vardır: Öteleme (translation), yansıma (reflection) ve dönme (rotation). Bazı kaynaklarda dördüncü izometri olarak tanımlanan kürüme (glide refletion) ise aslında öteleme ve yansıma izometrilerinin bileşkesidir. İzometriler ayrıca cebirsel yapılar olan "grup" oluşturur (Portnoy, Grundmeier ve Graham, 2006). Grup matematiksel olarak boş kümeden farklı bir A kümesi ve üzerinde tanımlı bir işlemle, A kümesinin bu işlem üzerinden kapalılık ve birleşme özelliği; ve etkisiz eleman ve ters elemana sahip olma özelliklerini sağladığında oluşan cebirsel yapıdır (Kutlu ve Kutlu, 1990). Bu bağlamda, izometri ve grup kavramları ilişkilidir.

Matematik eğitiminde temel dönüşümlerin (izometriler: öteleme, dönme ve yansıma) öğretilmesi önemlidir. Hollebrands (2003) temel dönüşümlerin (izometriler), önemli matematiksel kavramlar hakkında temel oluşturması örneğin lineer cebir, öğrencilerin matematiği kendi alanları (geometri ve cebir) arasında ilişkili bir disiplin olarak algılaması ve öğrencilerin üst düzey matematiksel düşünme aktivitelerini gerçekleştirmelerine olanak sağlaması açısından önemli kavramlar olduğunu ifade etmektedir. Öte yandan yapılan bir çok araştırma hem öğrencilerin (Hollebrands, 2003; Steketee ve Scher , 2011) hem de (hizmet öncesi) öğretmenlerin (Yanık, 2011) temel dönüşümleri (izometriler) anlamlandırmada çok zorlandıklarını bulgulamıştır. Bu zorlukların başında gelen sebeplerden biri olarak, temel dönüşümlerin öğrenenler tarafından sadece hareket olarak algılanması gösterilmekte ve fonksiyon olarak algılanmasının önemi vurgulanmaktadır (Hollebrands, 2003; Steketee ve Scher , 2011; Yanık, 2011, 2014).

Türkiye'deki öğretim programları incelendiğinde, izometri (temel dönüşümler) kavramı, ilkokul, ortaokul ve lise öğretim programlarında yer almaktadır. 2018 yılında, ilkokul 2. Sınıftan itibaren "uzamsal ilişkiler" alt öğrenme alanında yer verilen kazanımlar simetri (yansıma simetrisi) üzerinedir. Ortaokul 8. sınıfta ise, "dönüşüm geometrisi" alt öğrenme alanı altında öncelikle öteleme ve yansıma dönüşümleri işlenmektedir. Lise öğretim programında da, sadece 12. Sınıfta "dönüşümler" alt öğrenme alanında, hem temel dönüşümler (izometriler: öteleme, dönme ve simetri (yansıma simetrisi)) hem de temel dönüşümler ve bileşkeleri ile ilgili olarak problem çözmeye yer verilmektedir. Bunlarla birlikte yine 2019 yılında yayınlanan, özel yetenekliler matematik öğretim programında, ilkokul 2.sınıftan itibaren "uzamsal ilişkiler" alt öğrenme alanında simetri kavramı incelenmekte ve öğrencilerin 4. Sınıftan itibaren de sanatçıların eserlerini simetri kavramı üzerinden incelemeleri beklenmektedir. Ortaokul seviyesinde ise, yine 8. Sınıfta "dönüşüm geometrisi" alt öğrenme alanında öteleme ve yansıma dönüşümlerinin *"tarihî yapılarımızdaki ve geleneksel sanatlarımızdaki süsleme örneklerinden…" (p. 57)* yararlanılarak işlenmesi beklenmektedir. Öte yandan, lise düzeyinde de 10. Sınıftan itibaren hem "analitik geometri" hem de "geometri ve mimari" alt öğrenme alanlarında temel dönüşümleri (izometriler: öteleme, dönme ve simetri) nokta ve doğrular üzerinde oluşturma ve hem de temel dönüşümlerin bileşkelerini kullanarak motifler oluşturma ve yine tarihi eserleri inceleme üzerinde odaklanılmaktadır.

Bu bağlamda, bu çalışmada, temel dönüşümler (izometri) kavramı süslemeler yoluyla incelenecektir. Bundan sonraki bölümlerde öncelikle öteleme, dönme ve yansıma dönüşümlerini (izometriler) el sanatları bağlamındaki örnekler üzerinde tanıyacağız. Daha sonrasında ise, bu izometrilerle elde edilen yedi tane kuşak örüntüsünü yine el sanatları bağlamında inceleyeceğiz.

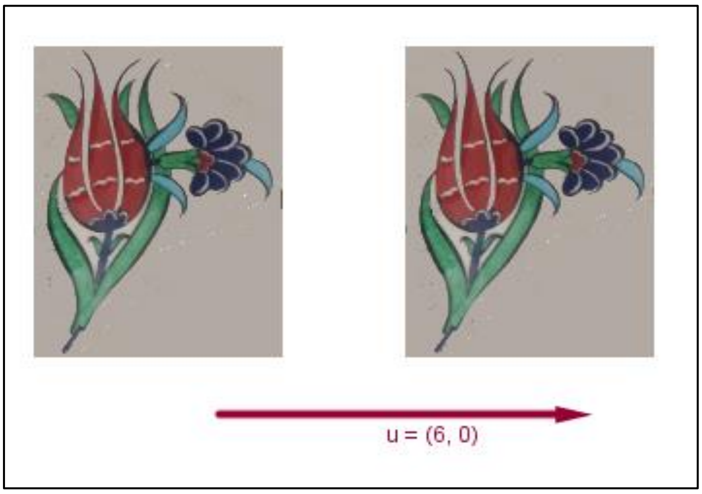
İzometri Türleri

Bu kısımda öncelikle temel dönüşümleri (izometrileri) yakından tanımaya çalışalım. Sonrasında ise bu izometrilerden türetilen ve zaman zaman temel izometrilerle karıştırılabilen kürümeyi inceleyeceğiz. Daha sonrasında da yine bu başlık altında izometrilere ait bazı özelliklere değineceğiz. İzometri türlerini ve özelliklerini anlatırken şekil 2 içinden aldığımız lale örneğini kullanalım (Şekil 5).

Şekil 5. Çini deseninden alınmış lale örneği

Öteleme

Öteleme izometrisi, uygulandığı nesnelerin bütün noktalarını bir vektör aracılığı ile belli bir değer kadar belli bir yönde doğrusal olarak taşır. Burada belli bir değerden kastedilen vektörün büyüklüğü, belli bir yönden kastedilen ise vektörün yönüdür. Şekil 6, lale örneğimizi x ekseninin pozitif yönünde 6 birim öteleyen bir vektörü ve ötelenmiş laleyi (görüntüsünü) göstermektedir. Bu örnekte özellikle dikkat edilmesi gereken ve yeni öğrenenlerin en çok karıştırabildiği ayrıntı, iki nesnenin arasındaki boşluğun 6 birim olmadığıdır. Öteleme izometrisinde, her bir nokta öteleme vektörü kadar taşınır yani şekil 6'daki örnekte fotoğraftaki lale ve yapraklarının sol yan veya sağ yan kenarları arasındaki uzaklık 6 birimdir.



Şekil 6. Lale ve u vektörü kadar ötelenmiş görüntüsü

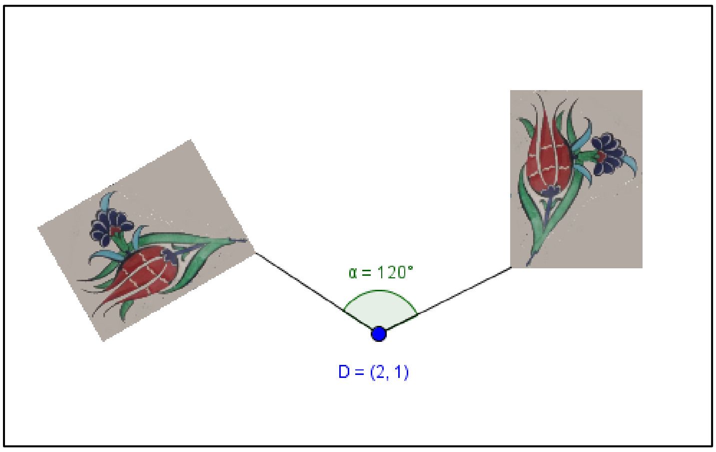
Yansıma

Yansıma izometrisi, uygulandığı nesnenin bütün noktalarını bir doğru (yansıma doğrusu) etrafında yansıtır, yani doğrunun bulunduğu yerde bir düz ayna varmış gibi bütün noktaların görüntüsünü oluşturur (Şekil 7). Bunu yaparken, bütün noktaların doğruya uzaklığı –ki bu dik uzaklıktır –ile o noktaların görüntülerinin doğruya uzaklığı aynı kalır. Dolayısıyla, yansıma doğrusunun nokta ile görüntüsünü birleştiren doğru parçasının orta dikmesi olduğu çıkarımında bulunabiliriz. Bu çalışmada yatay yansımalar Y_y ve düşey yansımalar ise Y_d sembolü ile gösterilecektir.

Şekil 7. Lale ve x=3 doğrusunda yansımış görüntüsü

Dönme

Dönme izometrisi, uygulandığı nesnelerin bütün noktalarını belli bir dönme noktası etrafında dönme açısı kadar saat yönünün ters yönünde döndürür (Şekil 8). Dönmenin saat yönünde olduğu durumlarda açı negatif değer ile gösterilir. Bizim bu bölümde ilgilendiğimiz genellikle dönmenin miktarı (açı değeri) olduğundan, açı değerini de sembol içinde göstereceğiz. Örneğin, şekil 8'deki gibi, α =120 derecelik dönme, D_α sembolü ile gösterilecektir.



Şekil 8. Lale ve (2,1) noktası etrafında 120 derece dönmüş görüntüsü

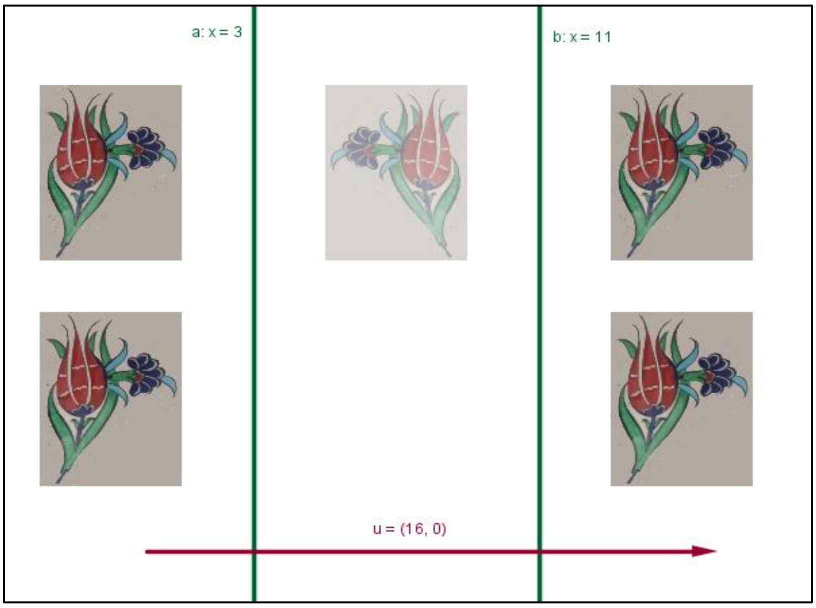
İzometrilerin bileşkesi

İzometriler de birer fonksiyon olduğu için, her fonksiyon gibi onların da bileşkesi alınabilir (Portnoy vd., 2006). İzometri bileşkeleri sayesinde hem yeni izometri türlerini tanıma fırsatı buluruz, hem de matematiğin başka konularını izometriler ve sanat bağlamında ele alma şansımız ortaya çıkar.

Öncelikle şekil 9'da gösterilen yansıma ve öteleme ilişkisini ele alan örneği inceleyelim. Şeklin sol tarafında görüldüğü gibi birbirinin aynı olan iki laleden alttaki lale 16 birimlik $\vec{u}$ vektörüyle sağa doğru (yatay doğrultuda ve pozitif yönde) ötelenmiştir. Üstteki lale ise, önce x=3 doğrusu üzerinde, daha sonra da x=11 doğrusu üzerinde yansıtılmıştır. Sonuçta, öteleme sonucu elde edilen görüntünün hemen üzerinde, aynı boyutlarda ve aynı yönelimde bir görüntü elde edilmiştir. Buradaki doğruların arasındaki uzaklığın 8 birim olması tesadüf değildir. "a" birim uzunluğundaki $\vec{u}$ vektörüyle ötelemek yerine, bu vektöre dik doğrultuda ve birbirlerine" $\frac{a}{2}$ "birim uzaklıkta yerleştirilmiş iki paralel doğruda yansıtmakla da aynı görüntü elde edilir.

Durumun matematiksel analizi şöyle yapılabilir. Düzlemde, şekil 9'da sol taraftaki lalenin herhangi bir noktasını (x,y) ile gösterelim. Bu noktanın x=d_1 doğrusu üzerinde yansıtılmış hali (x',y) noktası olacaktır. Yansıma izometrisine göre de, x' noktasının ve x noktasının x= d_1 doğrusuna uzaklıkları aynı kalacağından $|x - d_1| = |x' - d_1|$ olur. Bu durumda, $x' = -x + 2d_1$ olacaktır. (x',y) noktasının x=d_2 doğrusu üzerinde yansıtılmış halini de (x'',y) noktası olarak ele aldığımızda, aynı düşünceyle, x''$= -x' + 2d_2$ olur. Yani, x''$= x + 2d_2 - 2d_1$ olur. Böylelikle, lale üzerindeki herhangi bir (x,y) noktasının yansıma izometrisine göre en son görüntüsü $(x + 2d_2 - 2d_1, y)$ olacaktır. Bu ise , öteleme izometrisine göre, (x,y) noktasının herhangi bir $\vec{u}$=($2d_2 - 2d_1$,0) vektörü kadar ötelenmiş haline karşılık gelir. Burada, $\vec{u}$ vektörünün uzunluğu $\overrightarrow{|u|} = 2|d_2 - d_1|$ olacaktır. Diğer bir deyişle, a birim uzunluğundaki $\vec{u}$

vektörüyle ötelemek yerine, bu vektöre dik doğrultuda ve birbirlerine $\frac{a}{2}$ birim uzaklıkta yerleştirilmiş iki paralel doğruda yansıtmakla da aynı görüntü elde edilmiş olur. Benzer analiz, yatay öteleme yerine düşey veya eğik ötelemeler için de yapılabilir.



Şekil 9. Yansıma - öteleme ilişkisi

Dolayısıyla öteleme fonksiyonu iki yansıma fonksiyonunun bileşkesidir (Zembat, 2013a). Bu örnekteki durumu cebirsel olarak ifade etmek istersek,

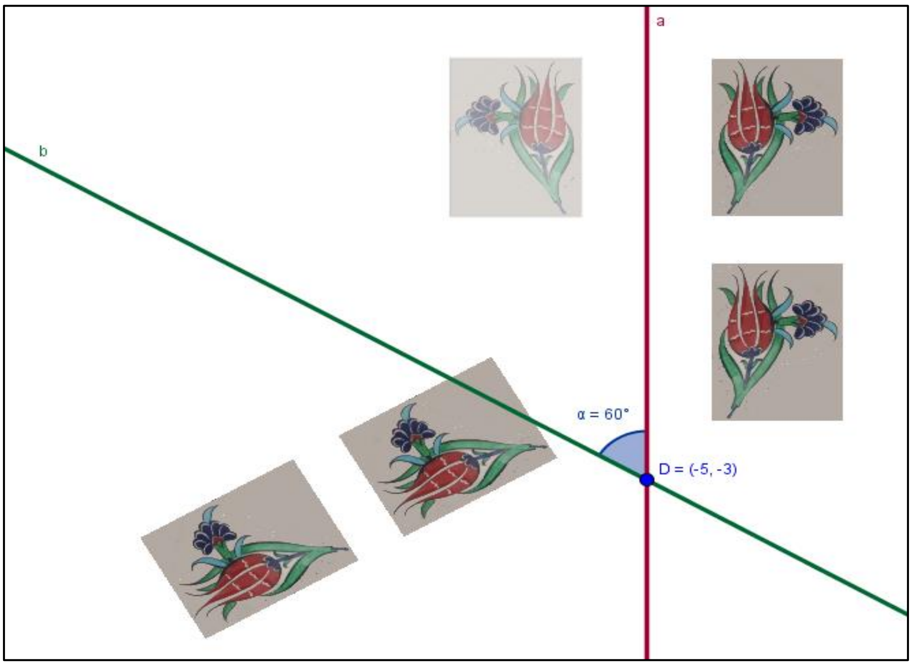
$$Y_d \circ Y_d = \text{Ö}$$

veya

$$(Y_{x=3})\circ(Y_{x=11}) = (\text{Ö}_{\vec{u}=16})$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada yukarıdaki açıklamamızdan da görüleceği üzere, ilk nesnenin konumunun ve ilk doğruya uzaklığının önemli olmadığına dikkatinizi çekmek isteriz.

Bir sonraki örneğimizde dönme izometrisi ile yansıma izometrisi arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz (Şekil 10). Dönme izometrisinde saatin ters yönü pozitif yön olduğundan, orijinal şekillerimiz a doğrusunun sağ tarafında görülmektedir. Üstteki laleyi önce a doğrusunda sonra da a doğrusu ile $60°$ lik açı yapan b doğrusunda yansıtalım. Alttaki laleyi ise, iki doğrunun kesişim noktası olan D noktası etrafında $120°$lik açıyla döndürelim. Şekil 10'da görüleceği gibi elde edilen son görüntüler aynı hizadadır. Eğer ilk şekiller üst üste, yani çakışık olsaydı elde edilecek son görüntüler de çakışık olurdu.



Şekil 10. Yansıma - dönme ilişkisi

Yine burada da, doğrular arasındaki açının (60°) dönme açısının (120°) yarısı olur. Bir nesneyi bir dönme noktası etrafında α açısı kadar döndürmek yerine, o dönme noktasından geçen ve aralarında $\frac{\alpha}{2}$ derecelik açı bulunan iki doğruda yansıtarak da aynı görüntüyü elde edebiliriz (Buradaki ispatı okuyucuca bırakıyoruz). Dolayısıyla dönme fonksiyonu iki yansıma fonksiyonun bileşkesidir (Zembat, 2013b). Bu örnekteki durumu cebirsel olarak ifade etmek istersek,

$$Y^{\circ}Y = D$$

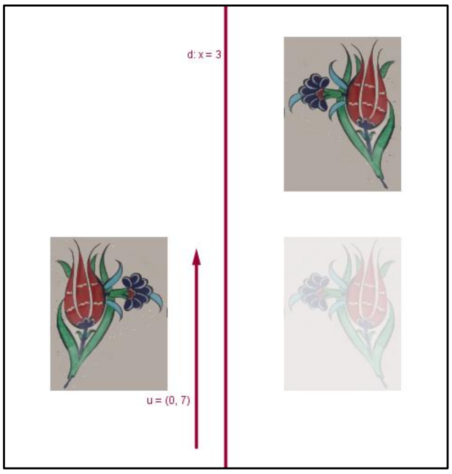
veya

$$(Y_{m=tan\theta})^{\circ}\left(Y_{m=\tan(\frac{\alpha}{2}+\theta)}\right) = D_{\alpha}$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada ilk nesnenin konumunun ve ilk doğrunun eğiminin önemli olmadığına ama dönme noktasının doğruların kesim noktası olması gerektiğine dikkatinizi çekmek isteriz.

Kürüme

Kürüme izometrisi, öteleme ve yansıma izometrileri yardımıyla elde edilen bir bileşke izometrisidir (Şekil 11). Kürüme izometrisi, Türkçe kaynaklarda ötelemeli yansıma veya yansımalı öteleme gibi adlarla anılsa da biz burada Boğaziçi Üniversitesi öğretim üyelerinden Prof. Dr. Ahmet Feyzioğlu'nun süslerin matematiği derslerinde kullandığı *kürüme izometrisi* terimini kullanacağız (yayınlanmamış ders notları, Feyzioğlu, 2016).

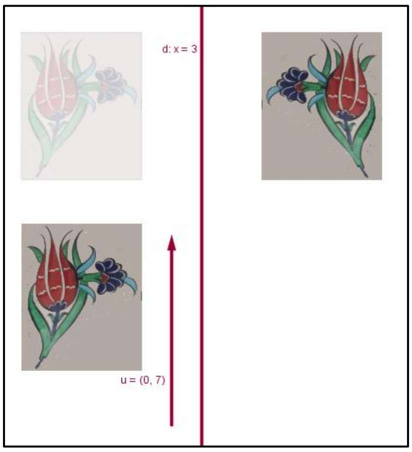


Şekil 11. Lale ve kürüme (yansıma ve öteleme)

Kürüme izometrisinde doğrudan kendini oluşturan öteleme ve yansıma izometrilerinin parametreleri –yani öteleme vektörü ve yansıma doğrusu - kullanılmaktadır. Kürüme izometrisini de cebirsel olarak ifade etmek gerektiğinde,

$$Y°Ö = K \; veya \; Ö°Y = K$$

şeklinde ifade edebiliriz.



Şekil 12. Lale ve kürüme (öteleme ve yansıma)

Kuşak Örüntüleri ve İzometri

El sanatları üzerindeki süslemeler çok çeşitlidir. Bunlar içinde genel bir kurala bağlı olmayan tamamen özgün süslemeler olabildiği gibi kendi içinde bir örüntü oluşturan süslemeler de bulunmaktadır. Şekil 13, bu şekilde örüntü oluşturmayan tekil süslemelere bir örnek olarak düşünülebilir. Renge dikkat etmediğimizde birbirinin aynı 8 süsleme, renk ayrımını dikkate aldığımızda ise kendi içinde dörder defa dönerek tekrarlayan süslemeler görülmektedir. Buradaki toplam 8 sayısının İslam eserlerinde genel olarak karşımıza çıkan sekizgen veya sekiz köşeli yıldızla anlamsal ilişkisi de olabilir veya sadece geometrik dengeyi dikkate almak için de öyle tasarlanmış olabilir. Her bir parçanın içinde yer alan yapraklar ve lalelerin de belli bir oranda büyümesi izometrik olmayan dönüşümlere güzel bir örnektir.

Şekil 13. Tekil süsleme örneği

Her ne kadar örüntü oluşturmayan tekil süslemeler, el sanatlarında özellikle takı süslemelerinde çok karşımıza çıksa da biz bu çalışmada daha önce de bahsettiğimiz üzere örüntü oluşturan tek boyutlu süslemeleri incelemekteyiz. Tek boyutlu süslemelerin kuşak (freize) örüntüleri olarak adlandırıldığını yukarıda vurgulamıştık. Kuşak örüntülerinde, yukarıda bahsettiğimiz öteleme, kürüme, yansıma ve dönme izometrileriyle karşılaşmaktayız. İçerdiği izometri türleri sayesinde 7 tane farklı kuşak örüntüsü karşımıza çıkmaktadır. Bu 7 farklı örüntü türlerini ayırt etmek için de literatürde semboller açısından birbirinden farklı ama içerdiği anlam açısından aynı olan çeşitli isimlendirmeler bulunmaktadır. Her biri değişik açıdan önemli olan bu isimlendirme ve gösterimlerden, kısa adı IUC olan Uluslararası Kristallografi Birliği (International Union of Crystallography) gösterimi olan IUC gösterimini kullanacağız.

Örüntü 1: Öteleme (p1) örüntüsü

Öteleme örüntülerinin görüntülerinin çok sade ve tasarımlarının kolay olmasından dolayı kuşak süslemelerinde bu örüntülerle sıklıkla karşılaşmaktayız. İstanbul Şehzade Camii'nin zemin döşemesinde kullanılan halının kenar süslemeleri, sadeliğiyle ve dolayısıyla kolay algılanabilir olmasıyla, kuşak örüntülerinden biri olan öteleme örüntülerine güzel bir örnek oluşturmaktadır (Şekil 14).

Şekil 14. Şehzadebaşı camii döşeme halısı

Ocak 2016'da çekilen bu fotoğrafta yer alan öteleme örüntüsünün daha yakın görüntüleri ve tekrar eden elemanları şekil 15 ve şekil 16'da görülmektedir.

Şekil 15. Öteleme örüntüsü

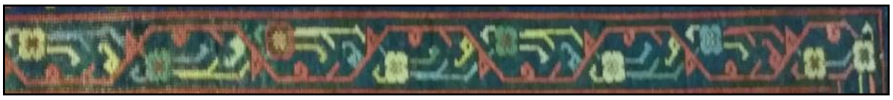
Şekil 16. Ötelenen eleman

Örüntü 2: Kürüme(p11g) örüntüsü

Kürüme örüntülerinde, izometrinin kendisi öteleme içerdiği için ayrıca bir öteleme aramaya gerek yoktur ve genelde kürünen elemanın simetri ekseni de şeklin ortasından geçen doğrudur (Şekil 17).

Şekil 17. İstanbul Türk İslam Eserleri Müzesinde sergilenen eski halılardan

Ocak 2016'da İstanbul, Türk İslam Eserleri Müzesinde sergilenen halılardan birinin göbek desenini çevreleyen bu kuşak süslemesinde örüntüyü ayırt edebilmek için renklerdeki farklılığı göz ardı etmek gerekmektedir. Özellikle kürünen şeklin içindeki küçük çiçek her seferinde sarı, yeşil ve mavi gibi farklı renkler aldığından örüntüyü fark etmeyi zorlaştırmaktadır (Şekil 18-19).



Şekil 18. Kürüme örüntüsü

Şekil 19. Kürünen eleman

İçerdiği görsel estetik nedeniyle, yansıma ve ötelemenin bileşkesi olan kürüme örüntülerini takılarda da görmek mümkündür (Şekil 20).

Şekil 20. Düşey yansıma ve ötelemelerden oluşan kürüme örüntüsü

Örüntü 3: Düşey yansıma (p1m1) örüntüsü

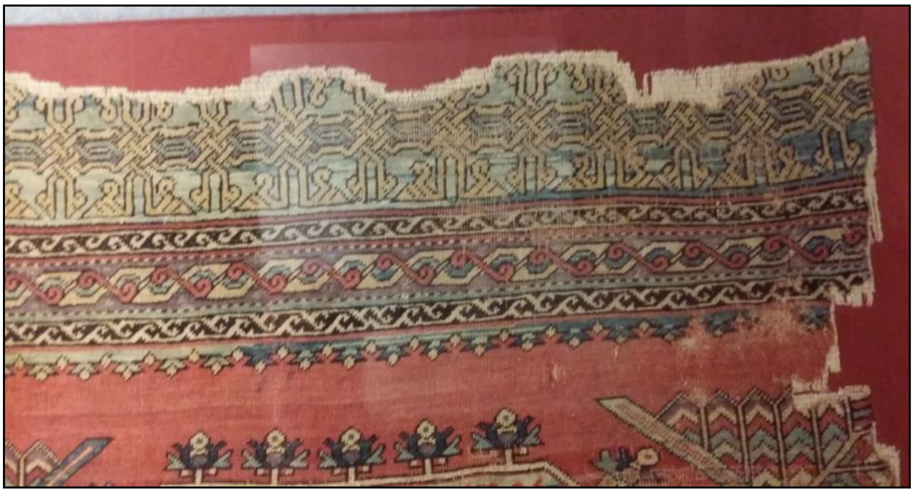
Düşey yansıma örüntülerinde, ötelemeye esas teşkil eden eleman, şekil 21'deki sağdaki tabağı çevreleyen dairesel kuşakta olduğu gibi ortasından geçen bir düşey eksene –

örüntünün dairesel kuşakta yer alması nedeniyle aslında düşey yerine yarıçap ekseni demek daha doğrudur –göre simetriktir. Diğer bir ifadeyle, örüntünün esas elemanına düşey bir doğru etrafında yansıma izometrisi uygulandıktan sonra –tabağın kenarında yer alan dairesel kuşaktaki mavi çiçek ve yaprakları –sürekli ötelenerek bir örüntü elde edilmiştir. O nedenle bazı kaynaklarda düşey yansıma ve öteleme örüntüsü diye tanımlandığı görülmektedir (wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group).

Şekil 21. Caferağa medresesi uygulamalı sanatlar merkezinde bir çini örneği

Örüntü 4: Dönme (p2) örüntüsü

Genel olarak dönme izometrisinden bahsedildiğinde, dönmenin miktarı da açı olarak veya çemberin kaçta kaçı olduğu ifade edilerek belirtilir. Fakat kuşak örüntülerinde hep 180° lik dönmeler kullanıldığı için bu ayrıntı verilmez. Şekil 22'de, İstanbul Halı Müzesinde sergilenen halılardan Anadolu beylikleri dönemine 15.yüzyıla ait bir örnek görülmektedir. Bu halının kenar süslemeleri içinde birbirinden bağımsız olarak tasarlanmış birkaç tane dönme izometrisi ve bu izometriden elde edilen elemanın ardışık olarak ötelenmesiyle elde edilen örüntüler bulunmaktadır.



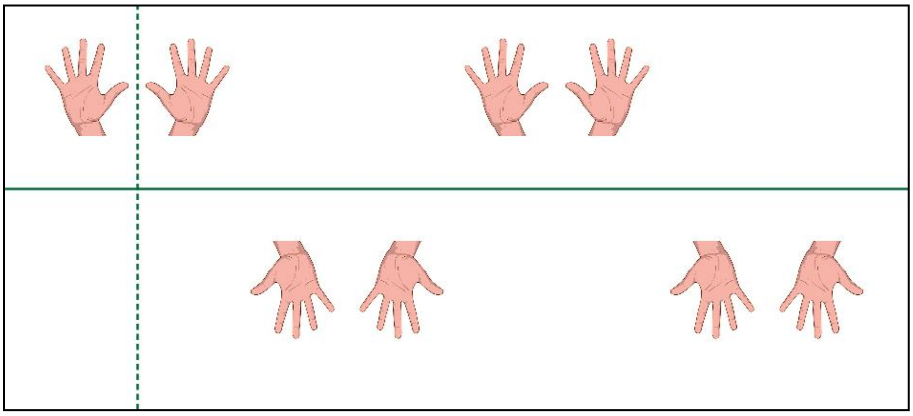
Şekil 22. İstanbul Halı Müzesinde sergilenen Anadolu beylikleri dönemine ait bir halı

Bu örüntüde özellikle dikkat çekmek istediğimiz, şekil 23'de daha yakın plandan görülen gül kırmızısı ve krem renkli şekillerdir. Bu şekiller geometri merkezlerine göre 180° lik açılarla döndürülmüşlerdir. Daha sonrasında elde edilen şekiller ötelenerek kuşak örüntüsü elde edilmiştir. Kenar süslemelerinde en çok görülen örüntü türlerindendir.

Şekil 23. Dönme örüntüsü

Örüntü 5: Düşey yansıma ve dönme (p2mg) örüntüsü

Bu örüntü türü yapısı gereği p11g olarak bilinen sadece kürüme örüntüsüyle karışmaktadır. O nedenle ele aldığımız örüntüyü tam olarak vurgulayabilmek için kendimiz bir örüntü tasarladık (Şekil 24). El örneğinde olduğu gibi el simetrisi kullanıldığında 180° lik dönme ile kürüme arasında karışıklık giderilmiş olmaktadır. Şekilde görüldüğü gibi, önce temel eleman düşey eksene göre yansıtılmış, sonrasında da elde edilen temel eleman çifti 180° lik dönmelerle tekrarlanmıştır.



Şekil 24. p2mg örüntüsü

Örüntü 6: Yatay yansıma (p11m) örüntüsü

Bu örüntü türünde, temel eleman, merkezinden geçen ve öteleme doğrultusuna paralel (yatay) bir eksene göre simetriktir. İstanbul, Topkapı Sarayı yakınlarındaki Arasta Pazar çarşısında yer alan bir dükkânda satılan kilim örneğinde "C harfini" andıran beyaz desenin oluşturduğu örüntü bu gruba girmektedir (Şekil 25). C harfine benzeyen eleman, yatayda yansıtıldıktan sonra ötelenerek örüntü oluşturulmuştur.

Şekil 25. p11m örüntüsü

Örüntü 7: Yatay ve düşey yansıma (p2mm) örüntüsü

Hem yatay hem de düşey simetrinin olduğu desenler, belki de içerdiği simetrilerin estetik görünümü nedeniyle el sanatları içinde en çok karşılaşılan örüntü türlerindendir. Şekil 26'da görülen halıda, merkez alanı çevreleyen kenar süslemeleri içinde koçbaşını da andıran süslemede, ötelenen temel eleman kendi içinde hem yatay hem de düşey eksene göre simetriktir. Hatta bu eleman da yansıtılarak oluşturulan elemanlar bileşke işlemine göre bir değişmeli grup oluştururlar (Portnoy, Grundmeier, Graham, 2006). Bu bölümde tanıtmaya çalıştığımız izometrilerin matematiksel anlamda grup oluşturmaları bir sonraki bölümde daha ayrıntılı ele alınacaktır.

Şekil 26. Türk evlerinin birçoğunda görülebilecek bir kilim örneğinde p2mm örüntüsü

Grup Teorisi

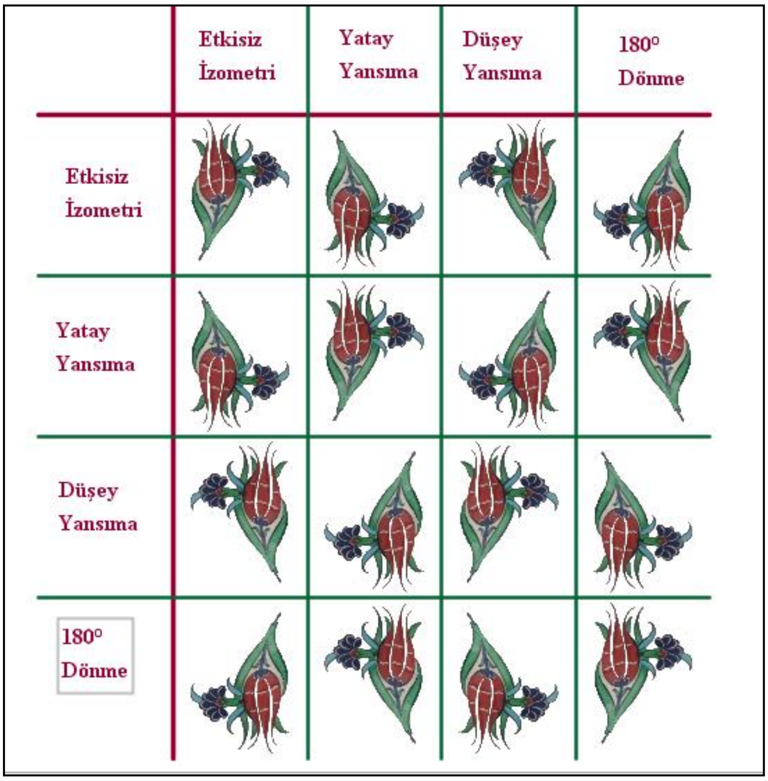
Süslemelerde karşımıza çıkan diğer bir matematiksel nesne de grup kavramıdır. Daha önce de ifade ettiğimiz üzere, matematiksel anlamda, grup, üzerinde belli aksiyomları barındıran bir cebirsel yapıdır: Grup oluşturabilmek için öncelikle bir küme ve bu küme üzerinde tanımlanmış bir işlem gerekmektedir. Sonrasında bu küme ve işlemin oluşturduğu sistem veya yapının, ayrıntıları aşağıda verilen kapalılık ve birleşme özelliklerini sağlaması ve etkisiz elemanı ile her elemanının ters elemanının bulunması gerekir.

Bu bağlamda, her elemanı farklı bir izometri olan bir A kümesi düşünelim.

- Etkisiz izometri: Uygulandığı elemanı olduğu gibi bırakan, hiçbir değişiklik yapmayan izometridir.
- Yatay yansıma: Uygulandığı elemanı, hemen alt tarafında bulunan bir yatay eksene göre yansıtan izometridir.

- Düşey yansıma: Uygulandığı elemanı, hemen sağ tarafında bulunan bir düşey eksene göre yansıtan izometridir.
- Dönme izometrisi: Uygulandığı elemanı, kendi ağırlık merkezi etrafında 180° lik dönme ile döndüren izometridir.

Bu A kümesinin elemanları ve bu elemanların bileşke işlemine göre verdiği sonuçlar şekil 27'deki tabloda verilmiştir. Burada temel eleman, şekil 2'deki çinili tabaktan alınan lale fotoğrafıdır ve tablodaki etkisiz eleman izometrilerinin kesişim yerlerinde hiçbir izometri uygulanmamış haliyle görülmektedir.



Şekil 27: Yansıma ve dönme izometrilerinden oluşan bir grup

Tablonun ilk satırında ve sütununda A kümesinin elemanları yukarıda tarif edildiği şekliyle aynen görülmektedir. Tablonun yatay ve düşeyinde verilen işlemlerin temel elemana önce satır, sonra sütun sırasıyla oluşturulmasıyla ele edilen görüntüler ise, tablonun diğer elemanlarını oluşturmaktadır. Şimdi tablonun elemanlarını inceleyerek, (A,◦) sisteminin grup oluşturup oluşturmadığını anlayalım.

- Tablonun içinde yer alan bütün görüntüler, A kümesinin tanımında verilen elemanlar olduğundan bu A kümesi, bileşke işlemine göre kapalıdır. A kümesinin herhangi iki elemanının bileşke işlemine göre görüntüsü yine A kümesinin bir elemanıdır.

- Burada tanımlanan izometrilerden herhangi üçünün görüntüsü önce hangi ikisinin işleme sokulduğuna bakılmaksızın hep aynı sonucu verdiğinden kümemiz bileşke işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. Mesela, verilen örnekte yatay yansıma, düşey yansıma ve dönme işlemlerinden oluşan bir bileşke işlemi zincirinde şu sonuçlar elde edilir.

$$Y_y{}^\circ(Y_d{}^\circ D_{180}) = Y_y{}^\circ Y_y = Etkisiz\ izometri$$
$$\left(Y_y{}^\circ Y_d\right){}^\circ D_{180} = D_{180}{}^\circ D_{180} = Etkisiz\ izometri$$

  Her işlem sırasında da aynı sonuç elde edildiğinden, bu örneği birleşme özelliğinin varlığına kanıt olarak kullanabiliriz.
- Kümenin elemanlarından biri olan etkisiz izometri, etkisiz elemandır.
- Bu küme içinde tanımlanan her izometrinin kendisiyle bileşkesi etkisiz eleman olan etkisiz izometriyi vermektedir. Bu nedenle, bu küme içinde tanımlanan her elemanın bileşke işlemine göre tersinin olduğunu söyleyebiliriz.

Verilen A kümesi bileşke işlemine göre bütün gerekli şartları sağladığı için (A, ◦) sistemi bir gruptur diyebiliriz. Hatta A kümesinin elemanları bileşke işlemine girerken yerleri değişse bile aynı sonucu verdiğinden, yani değişme özelliğine de sahip olduğundan, (A, ◦) sistemi bir değişmeli gruptur.

Sonuç ve Değerlendirme

Bu çalışmada el sanatları içinde yerleşik matematiği tartışırken, sıkça gördüğümüz desenlerin cebir ve cebirsel düşünmenin temel kavramlarından olan fonksiyon ile başlayarak, bu kavramın dönüşüm ve izometri kavramları ile ilişkisine yer verdik. Bu bağlamda, öncelikle dönüşüm ve izometri kavramlarını inceledik ve sonrasında da, izometri türleri başlığı altında dönüşüm geometrisi fonksiyonları olan öteleme, yansıma, dönme ve kürüme fonksiyonlarını ele aldık. Böylelikle, kuşak süslemelerindeki matematiği incelerken, kuşak süslemelerinde sıklıkla görebileceğimiz tek boyutlu süsleme örüntüleri (kuşak örüntüleri) kavramlarını izometri türleri açısından irdeledik. Son olarak ise izometri türleri üzerinden grup kavramı ve bu kavramların arasındaki ilişkiyi süslemelerde nasıl inceleyebileceğimize değindik.

Cebir kavramlarını, özelinde ise temel dönüşümleri (izometri) öğrenmenin zorluğu göz önüne alındığında (Hollebrands, 2003; Yanık, 2011, 2014), bu çalışmanın hem öğretmenlere hem de öğretmen adaylarına katkı sunacağını düşünmekteyiz. Öyle ki, öğretmenler lise matematik müfredatında yer alan öteleme-yansıma-dönme kavramlarının öğretiminde, bu çalışmada yer verilen örnekleri kullanabilirler veya bahsi geçen açıklamalar eşliğinde teknolojinin de yardımı ile kendi örneklerini oluşturabilirler. Örneğin, bazı çalışmalarda da belirtildiği üzere öğrencilerin teknolojiye çok bağımlı kalmadan da izometrileri inşa edebilmeleri veya ifade edebilmeleri önemlidir (Sünker ve Zembat, 2012; Yanık ve Flores, 2009). Bu bağlamda, öğretenler, öğrencilere bu çalışmada yer alan süslemeleri sunarak, bu süslemelerde hangi izometrilerin nasıl oluştuğunu sorabilirler. Örneğin, şekil 18'de kürümenin nasıl gerçekleştiği sorulabilir. Yine örneğin şekil 26'da verilen kilim örneği kullanılarak, iki yansıma fonksiyonu bileşkesinin bir öteleme fonksiyonu oluşturacağı bilgisinin öğrenciler tarafından izah edilmesi beklenebilir. Hatta öğrencilerinin kendi örneklerini oluşturmalarına yönelik olarak etkinlikler üretilebilir. Örneğin, proje bağlamında, öğrencilerden tarihi eserleri ziyaret ederek, tarihi eserlerde ve mimari yapılarda bulguladıkları izometrileri örnekleriyle açıklamaları beklenebilir. Benzer şekilde, üniversite seviyesinde ise, öğretmen yetiştiricileri, geometri ve cebir öğretimi derslerinde de bir takım semboller arasına sıkışıp kalmış cebirsel kavramlardan olan izometri ve grup kavramlarını, el sanatları bağlamında ele alarak öğrencilerinin bu kavramları içselleştirmelerine yönelik çalışmalar yapabilirler. Böylelikle, hem öğrenciler ve hem de öğretmen adayları, matematiği insanın zihinsel eylemlerinin bir ürünü olarak inceleyebilme fırsatını yakalayabileceklerdir.

Kaynaklar

Akpınarlı, G., Büyükyazıcı, O. ve Kurt, E. (2010). *Hemşin Çamlıhemşin el örgüsü çoraplar*. Gazi Üniversitesi Bap Projeleri (1. baskı). Ankara.

Baker, A. (2005). *Groups and symmetry*. Ders notu. University of Glasgow, UK.

Bixler, H. N. (1980). *A group-theoretical analysis of symmetry in two dimensional patterns from Islamc art* (Yayınlanmamış doktora tezi). New York University.

Feyzioğlu, A. (2016). *Yayınlanmamış ders notları*. Boğaziçi Üniversitesi: İstanbul.

Hoggar, S. G. (2006). *Mathematics of digital images: Creation, compression, restoration, recognition*. UK: Cambridge University Press.

Hollebrands, K. F. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 55-72.

Kutlu, S. B. ve Kutlu, B. (1990). *Modern temel matematik: Soyut matematiğe giriş*. İstanbul: Fil Yayınevi

Portnoy, N., Grundmeier, T. A. ve Graham, K. J. (2006). Students' understanding of mathematical objects in the context of transformational geometry: Implications for constructing and understanding proofs. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*, 196-207.

Sarıkaya Hünerel, Z. ve Er, B. (2012). Halk kültürünün tanıtılmasında el sanatlarının yeri ve önemi. *Journal of Life Sciences, 1*(1), 179-190.

Steketee, S. ve Scher, D. (2006). Connecting functions in geometry and algebra. *Mathematics Teacher*, *109*(6), 448-455.

Sünker, S. ve Zembat, I.O. (2012). Teaching of translations through use of Vectors in Wingeom-tr environment. *Elementary Education Online, 11*(1), 173-194.

Yanık, H. B. (2014). Middle-school students' concept images of geometric translations. *The Journal of Mathematical Behavior, 36,* 33-50.

Yanık, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics, 78,* 231-260.

Yanık, H. B. ve Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learnig path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28,* 41-57.

Zembat, I. O. (2013a). Geometrik dönüşümlerden öteleme ve farklı anlamları. I. O. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Haz.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (s. 629-644). Pegem Akademi: Ankara.

Zembat, I.O. (2013b). Geometrik dönüşümlerden dönme ve özellikleri. I. O. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Haz.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (s. 645-658). Pegem Akademi: Ankara

Handcrafts and Mathematics: A Look into the World of Algebra

Abstract

Bixler (1980), while discussing the relationship between mathematics and art, states that mathematicians and artists interpret the same physical space with different reactions. While the artist, through art products, reconstructs her reaction and what she sees and understands, the mathematician's effort has been to try to explain such interpretations in a mathematical language. As mathematics educators, in this paper, we will deal with mathematics and mathematics education simultaneously. More specifically, we will discuss the mathematics built in handcrafts, examine how the patterns we frequently see in handcrafts include and depict the concepts of functions and isometries which are the basic concepts of algebra and algebraic thinking. Therefore, with real-life examples, we will discuss the concepts of transformation and isometry as special kinds of functions, and then, focus on the functions in transformation geometry such as translation, reflection and rotation. We contend that discussing algebraic concepts using examples coming from real life situations, this study might contribute to the teaching of translation-reflection-rotation in high school mathematics curriculum as well as the teaching of university level geometry and algebra.

Keywords: Handcrafts, function, isometry, group theory, mathematics education.