АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНОЙ МАТРИЦЫ МЕТОДОМ ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Доц., док. З.К. ИМАНАЛИЕВ
Кыргызский технический университет им. И. Раззакова
Б.Ы. АШИРБАЕВ
Кыргызский технический университет им. И. Раззакова

Одним из эффективных асимптотических методов в теории сингулярных возмущений является метод пограничных функций, математические основы которого заложены в работах [1,2].

Различным аспектам сингулярных возмущений и метода пограничных функций в задачах оптимального управления посвящены работы А.Б. Васильевой., В.Ф. Бутузова [3], А.Б. Васильевой., М.Г. Дмитриева [4], С.В. Белокопытова., М.Г.Дмитриева [5], А.И.Кобрина [6], М.П. Белянина, А.Б. Васильевой [7], Н.Н. Нефедова [8,9].

В данной работе в отличие от указанных выше предложен построения матриц перехода для линейной системы который основан на использование метода пограничных функций и обобщен результаты работ [11,12]

При исследовании задачи оптимального управления линейными или квазилинейными системами высокого порядка первым действием является построение переходной матрицы исследуемой системы. Из-за достаточно высокой размерности матрицы исходной системы вычисление переходной матрицы может оказаться сложной задачей.

Рассматривается однородная система

$$\dot{y} = A(t)y\,,\ y(t_0) = y_0\,. \tag{1}$$

Путем введения малого параметра μ, матрицу A(t) можно представить в форме

$$A(t,\mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \dfrac{A_3(t)}{\mu} & \dfrac{A_4(t)}{\mu} \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

где $A_1(t)-(n\times n),\ A_2(t)-(n\times m),\ A_3(t)-(m\times n),\ A_4(t)-(m\times m)$, матрицы. $x\in R^n, z\in R^m$.

Тогда вместо исходной системы получаем систему, состоящая из двух подсистем, характеризующих отдельные фазы общего движения, следующие в определенной очередности.

Предположим что:

1. Матрицы $A_1(t),\ A_2(t),\ A_3(t),\ A_4(t),$ определены, равномерно ограничены и

равномерно непрерывны при $t \in [t_0, t_1]$.

2. Характерические значения $\lambda_i(t)$ матрицы $A_4(t)$ подчиняется неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda_i(t) \le \gamma < 0,\ (i = \overline{1,m}),\ t \in [t_0, t_1] \tag{3}$$

Переходную матрицу $y(t, t_0, \mu)$ системы (1) можно определить как решение матричного дифференциального уравнения

$$\dot{Y}(t,t_0,\mu) = A(t,\mu)\cdot Y(t,t_0,\mu),\ Y(t_0,t_0,\mu) = E_{n+m}. \tag{4}$$

Матрицу $Y(t, t_0, \mu)$ разобьем на блоки [12]

$$Y(t,t_0,\mu) = \begin{pmatrix} Y_1(t,t_0,\mu) & \mu Y_2(t,t_0,\mu) \\ Y_3(t,t_0,\mu) & \mu Y_4(t,t_0\mu) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

С учетом (5) из (4) будем иметь

$$\dot{Y}_1 = A_1(t)Y_1 + A_2(t)Y_3,\quad \mu\dot{Y}_3 = A_3(t)Y_1 + A_4(t)Y_3 \tag{6}$$

$$Y_1(t_0,t_0,\mu) = E_n,\ Y_3(t_0,t_0,\mu) = 0.$$

$$\dot{Y}_2 = A_1(t)Y_2 + A_2(t)Y_4,\ \mu\dot{Y}_4 = A_3(t)Y_2 + A_4(t)Y_4. \tag{7}$$

$$Y_2(t_0,t_0,\mu) = 0,\ Y_4(t_0,t_0,\mu) = \frac{1}{\mu}E_m.$$

Решение задачи Коши (6) и (7) представим в виде [3]

$$Y_i(t,t_0,\mu) = \overline{Y}_i(t,t_0,\mu) + \Pi Y_i(\tau,\mu),\ \text{i=1,2,3,4.} \tag{8}$$

где

$$\overline{Y}_i(t,t_0,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_{ik}(t,t_0)\mu^k,\ \text{i=1,2,3,4} \tag{9}$$

$$\Pi Y_i(\tau,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k Y_i(\tau)\mu^k, i = 1,2,3,$$

$$\Pi Y_4(\tau,\mu) = \frac{1}{\mu}\Pi_{-1}Y_4(\tau) + \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k Y_4(\tau)\mu^k, \tau = \frac{t-t_0}{\mu}. \tag{10}$$

В дальнейшем примем следующее обозначение

$$A_{im}(t_0) = \left.\frac{d^m A_i(t_0 + \tau\mu)}{d\tau}\right|_{\mu=0} \cdot \frac{\tau^m}{m!},\ i = \overline{1,4},\ \text{m=1,2,...}$$

Подставим равенство (8) в систему (6) и (7), и приравнивая отдельно члены зависящие от t и τ получим системы.

С аргументом t:

$$\frac{d\overline{Y}_1}{dt} = A_1\overline{Y}_1 + A_2\overline{Y}_3\,,\ \mu\frac{d\overline{Y}_3}{dt} = A_3\overline{Y}_1 + A_4\overline{Y}_3 \qquad (11)$$

$$\frac{d\overline{Y}_2}{dt} = A_1\overline{Y}_2 + A_2\overline{Y}_4\ \ \mu\frac{d\overline{Y}_4}{dt} = A_3\overline{Y}_2 + A_4\overline{Y}_4 \qquad (12)$$

С аргументом τ :

$$\frac{d\Pi Y_1}{d\tau} = \mu A_1\Pi Y_1 + \mu A_2\Pi Y_3\,,\ \frac{d\Pi Y_3}{d\tau} = A_3\Pi Y_1 + A_4\Pi Y_3\,. \qquad (13)$$

$$\frac{d\Pi Y_2}{d\tau} = \mu A_1\Pi Y_2 + \mu A_2\Pi Y_4,\ \frac{d\Pi Y_4}{d\tau} = A_3\Pi Y_2 + A_4\Pi Y_4\,. \qquad (14)$$

Подставляя разложения (9), (10) в (11) –(14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра μ получим систему уравнений относительно t и τ с соответствующими начальными условиями.

При μ^{-1} относительно τ :

$$\frac{d\Pi_{-1}Y_4(\tau)}{d\tau} = A_{40}(t_0)\Pi_{-1}Y_4(\tau)\,,\ \Pi_{-1}Y_4(0) = E_m\,. \qquad (15)$$

При μ^0 относительно t:

$$\frac{d\overline{Y}_{10}(t,t_0)}{dt} = (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)\overline{Y}_{10}(t,t_0),\ \overline{Y}_{30}(t,t_0) = -A_4^{-1}A_3\overline{Y}_{10}(t,t_0)\,,\ Y_{10}(t_0,t_0) = E_n. \quad (16)$$

$$\frac{d\overline{Y}_{20}(t,t_0)}{dt} = (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)\overline{Y}_{20}(t,t_0)\,,\ \overline{Y}_{40}(t\ ,t_0) = -A_4^{-1}A_3\overline{Y}_{20}(t,t_0)\,. \quad (17)$$

$$\overline{Y}_{20}(t_0,t_0) = -A_{20}(t_0)A_{40}^{-1}(t_0)$$

При μ^0 относительно τ :

$$\frac{d\Pi_0Y_1(\tau)}{d\tau} = 0,\ \frac{d\Pi_0Y_3(\tau)}{d\tau} = A_{30}(t_0)\Pi_0Y_1(\tau) + A_{40}(t_0)\Pi_0Y_3(\tau)\,. \qquad (18)$$

$$\frac{d\Pi_0Y_2(\tau)}{d\tau} = A_{20}(t_0)\Pi_{-1}Y_4(\tau),$$

$$\frac{d\Pi_0 Y_4(\tau)}{d\tau} = A_{30}(t_0)\Pi_0 Y_2(\tau) + A_{40}(t_0)\Pi_0 Y_4(\tau) + A_{41}(t_0)\Pi_{-1} Y_4 \qquad (19)$$

где $A_{i0}(t_0) = A_i(t_0), i = 1,2,3,4$

Для (15) – (19) имеем начальные условия

$$\overline{Y}_{10}(t_0,t_0) + \Pi_0 Y_1(0) = E_n,\ \ Y_{30}(t_0,t_0) + \Pi_0 Y_3(0) = 0 \qquad (20)$$

$$Y_{20}(t_0,t_0) + \Pi_0 Y_2(0) = 0,\ \overline{Y}_{40}(t_0,t_0) + \Pi_0 Y_4(0) = 0 \qquad (21)$$

Решения уравнения (15) можно записать в виде

$$\Pi_{-1} Y_4(\tau) = e^{A_4(t_0)\tau}, \Pi_{-1} Y_4(0) = E_m \qquad (22)$$

Решения системы (16) – (19) с начальными условиями (20), (21) определяются следующими соотношениями:

$$\Pi_0 Y_1(\tau) = 0\,, \Pi_0 Y_2(\tau) = A_{20}(t_0) A_{40}^{-1}(t_0) e^{A_{40}(t_0)\tau}\,,$$

$$\Pi_0 Y_3(\tau) = e^{A_{40}(t_0)\tau} A_4^{-1}(t_0) A_3(t_0) \qquad (23)$$

$$\Pi_0 Y_4(\tau) = -e^{A_4(t_0)\tau} A_{40}^{-1}(t_0) A_{30}(t_0) A_{20}(t_0) A_{40}^{-1}(t_0) + \int_0^\tau e^{A_4(t_0)(\tau-s)} \left(A_{41}(t_0) + A_{30}(t_0) A_{20}(t_0) A_{40}^{-1}(t_0)\right) e^{A_{40}(t_0)s} ds$$

$$\overline{Y}_{10}(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} (A_1(\sigma) - A_2(\sigma) A_4^{-1}(\sigma) A_3(\sigma)) d\sigma},\ \overline{Y}_{30}(t\ ,t_0) = -A_4^{-1}(t_0) A_3(t_0) \overline{Y}_{10}(t,t_0), \qquad (24)$$

$$\overline{Y}_{20}(t,t_0) = -e^{\int_{t_0}^{t} (A_1(\sigma) - A_2(\sigma) A_4^{-1}(\sigma) A_3(\sigma)) d\sigma} \cdot A_{20}(t_0) A_{40}^{-1}(t_0)\,,$$

$$\overline{Y}_{40}(t\ ,t_0) = -A_4^{-1}(t_0) A_3(t_0) \overline{Y}_{20}(t,t_0)$$

Для матрицы $\Pi_0 Y_i(\tau)$, i=2,3,4 справедлива следующая оценка на полуинтервале $(0,\infty)$.

$$\left\|\Pi_0 Y_i(\tau)\right\| \le C \cdot \exp(-\beta\tau), \tau \ge 0, i = 2,3,4. \qquad (25)$$

Поступая аналогично с членами разложений порядка μ^p можно относительно t записать следующее:

$$\frac{d\overline{Y}_{1p}}{dt} = A_1(t)\overline{Y}_{1p}(t,t_0) + A_2(t)\overline{Y}_{3p}(t,t_0),\ \frac{d\overline{Y}_{3p}}{dt} = A_3(t)\overline{Y}_{1p}(t,t_0) + A_4(t)\overline{Y}_{3p}(t,t_{0)}\,. \qquad (26)$$

$$\frac{d\overline{Y}_{2p}}{dt}=A_1(t)\overline{Y}_{2p}(t,t_0)+A_2(t)\overline{Y}_{4p}(t,t_0),\ \frac{d\overline{Y}_{4,p-1}}{dt}=A_3(t)\overline{Y}_{2p}(t,t_0)+A_4(t)\overline{Y}_{4p}(t,t_0). \quad (27)$$

относительно τ :

$$\frac{d\Pi_p Y_1(\tau)}{d\tau}=d_{1p}(\tau),\ \frac{d\Pi_p Y_3(\tau)}{d\tau}=A_{30}(t_0)\Pi_p Y_1(\tau)+A_{40}(t_0)\Pi_p Y_3(\tau)+d_{3p}(\tau). \quad (28)$$

$$\frac{d\Pi_p Y_2(\tau)}{d\tau}=d_{2p}(\tau),\ \frac{d\Pi_p Y_4(\tau)}{d\tau}=A_{30}(t_0)\Pi_p Y_2(\tau)+A_{40}(t_0)\Pi_p Y_4(\tau)+d_{4p}(\tau). \quad (29)$$

где $$d_{1p}(\tau)=\sum_{j=0}^{p-1}A_{1,p-1-j}(t_0)\Pi_j Y_1(\tau)+\sum_{j=0}^{p-1}A_{2,p-1-j}(t_0)\Pi_j Y_3(\tau)$$

$$d_{2p}(\tau)=A_{2p}(t_0)\Pi_{-1}Y_4(\tau)+\sum_{j=0}^{p-1}A_{1,p-1-j}(t_0)\Pi_j Y_2(\tau)+\sum_{j=0}^{p-1}A_{2,p-j}(t_0)\Pi_j Y_4(\tau)$$

$$d_{3p}(\tau)=\sum_{j=0}^{p-1}A_{3,p-j}(t_0)\Pi_j Y_1(\tau)+\sum_{j=0}^{p-1}A_{4,p-j}(t_0)\Pi_j Y_3(\tau)$$

$$d_{4p}(\tau)=A_{4p+1}(t_0)\Pi_{-1}Y_4(\tau)+\sum_{j=0}^{p-1}A_{3,p-j}(t_0)\Pi_j Y_2(\tau)+\sum_{j=0}^{p-1}A_{4,p-j}(t_0)\Pi_j Y_4(\tau)$$

Начальные условия для уравнения p -го приближения определяются из условия:

$$\overline{Y}_{1p}(t_0,t_0)+\Pi_p Y_1(0)=0,\ \overline{Y}_{2p}(t_0,t_0)+\Pi_p Y_2(0)=0. \quad (30)$$

$$\overline{Y}_{3p}(t_0,t_0)+\Pi_p Y_3(0)=0,\ \overline{Y}_{4p}(t_0,t_0)+\Pi_p Y_4(0)=0. \quad (31)$$

Предположим, теперь, что определены члены разложений (9), (10) до номера p включительно, т.е. получены следующие частичные суммы

$$Y_{ip}(t,t_0,\mu)=\sum_{j=0}^{p}\left[\overline{Y}_{ij}(t,t_0)+\Pi_j Y_i(\tau)\right]\mu^j, i=1,2,3, \quad (32)$$

$$Y_{4p}(t,t_0,\mu)=\frac{1}{\mu}\Pi_{-1}Y_4(\tau)+\sum_{j=0}^{p}\left[\overline{Y}_{4j}(t,t_0)+\Pi_j Y_4(\tau)\right]\mu^j. \quad (33)$$

Тогда решения системы уравнений (6), (7) может быть представлены в виде:

$$Y_i(t,t_0,\mu)=\overline{Y}_{ip}(t,t_0,\mu)+\Pi_j Y_i(\tau), i=1,2,3,4, j=\overline{1,p}. \quad (34)$$

Справедливо следующее утверждение:

Если выполняется условие (3), то при достаточно малых значениях параметра μ для матричных функций $\overline{Y}_{ip}(t,t_0,\mu)$ и $\Pi_j Y_i(\tau)$ будут справедливы следующие оценки

$$\left\|\overline{Y}_{ip}(t,t_0,\mu)\right\| \le C\mu^{p+1}, \text{ где } i=1,2,3,4, j=\overline{1,p} \qquad (35)$$

$$\left\|\Pi_j Y_i(\tau)\right\| \le C\exp(-\beta\tau), \tau \ge 0, \qquad (36)$$

С и β некоторые положительные постоянные.

Теперь из разложения (10) выделим определенные числа слагаемых, которые образуют нулевое приближение переходной матрицы $Y(t,t_0\mu)$. Нулевое приближение обозначим через $Y_0(t,t_0,\mu)$

Рассмотрим порождающую систему, которая получается из (1) при $\mu = 0$

$$\dot{\overline{x}} = A_1(t)\overline{x} + A_2(t)\overline{z},\ 0 = A_3(t)\overline{x} + A_4(t)\overline{z}. \qquad (37)$$

Если через $x(t,\mu) = \overline{x}(t,\mu) + \Pi x(\tau,\mu)$ и $z(t,\mu) = \overline{z}(t,\mu) + \Pi z(\tau,\mu)$ обозначим решение задачи Коши (1), а через $x^0(t)$ и $z^0(t)$ решение порождающей системы (37) при условии $x(t_0) = x^0$, то при выполнении условии теоремы А.Н.Тихонова [3] имеем [10]

$$x(t,\mu) = x^0(t) + O(\mu),\ z(t,\mu) = z^0(t) + \frac{1}{\mu}\Pi_{-1}z(\tau) + O(\mu) \qquad (38)$$

где $\forall t \in [t_0,t_1]$, $\frac{1}{\mu}\Pi_{-1}z(\tau)$-первый член разложения пограничной функции $\Pi z(\tau,\mu)$.

Применяя это положение к задаче (4), можно записать нулевое приближение $Y_0(t,t_0)$ переходной матрицы $Y(t,t_0\mu)$, которое дает равномерную асимптотику с точностью $O(\mu)$ на всем интересующем нас отрезке времени:

$$Y_0(t,t_0,\mu) = \begin{pmatrix} e^{\int_{t_0}^{t} A_0(\lambda)d\lambda} & 0 \\ -A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} A_0(\lambda)d\lambda} + e^{A_4(t_0)\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)}A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0) & e^{A_4(t_0)\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)} \end{pmatrix} \qquad (39)$$

где $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$.

Из непрерывности матрицы $A_i(t)$ на отрезке $[t_0,t_1]$ следует, что в каждой точке $t \in [t_0, t_1]$ производная функции $M(t) = \int_{t_0}^{t} A_0(\lambda) d\lambda$ по верхнему пределу равна подынтегральной функции $A_0(t)$, т.е. $\frac{dM(t)}{dt} = A_0(t)$.

Теорема 1. Матрица $Y_0(t, t_0, \mu)$ является решением матричного дифференциального уравнения

$$\dot{Y}_0(t, t_0, \mu) = A_*(t) Y_0(t, t_0, \mu), \; Y_0(t_0, t_0) = E_{n+m} \tag{40}$$

где $A_*(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_0(t) & 0 \\ -A_4^{-1}(t_0) A_3(t_0) A_0(t) + \frac{1}{\mu} A_3(t_0) & \frac{A_4(t_0)}{\mu} \end{pmatrix}$.

Доказательство. Представим матрицу $Y_0(t, t_0)$ в виде

$$Y_0(t, t_0, \mu) = V \overline{Y}_0(t, t_0, \mu) V^{-1}, \tag{41}$$

где $V = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -A_4^{-1}(t_0) A_3(t_0) & E_m \end{pmatrix}$, $\overline{Y_0}(t, t_0, \mu) = \begin{pmatrix} e^{\int_{t_0}^{t} A_0(\lambda) d\lambda} & 0 \\ 0 & e^{A_4(t_0)\left(\frac{t - t_0}{\mu}\right)} \end{pmatrix}$

Обозначим через $\overline{A}(t, \mu)$ матрицу $\overline{A}(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_0(t) & 0 \\ 0 & \frac{A_4(t_0)}{\mu} \end{pmatrix}$. Тогда дифференцируя обе части равенства (41) получим

$$\frac{dY_0(t,t_0,\mu)}{dt} = V\frac{d\overline{Y}_0(t,t_0,\mu)}{dt}V^{-1} = V\overline{A}(t)\overline{Y}_0(t,t_0,\mu)V^{-1} = V\overline{A}(t)V^{-1}V\overline{Y}_0(t,t_0,\mu)V^{-1} = V\overline{A}(t)V^{-1}Y_0(t,t_0,\mu) =$$
$$= A_*(t)Y_0(t,t_0,\mu).$$

При $t = t_0$ $Y_0(t_0, t_0) = E_{n+m}$, ч.т.д.

Теорема 2. Матрица $A_*(t, \mu)$ определяет систему с разделенными переменными

$$\dot{\overline{x}} = A_0(t)\overline{x}, \; \overline{x}(t_0) = x^0, \tag{42}$$

$$\mu\dot{\tilde{z}} = A_4(t_0)\tilde{z} \quad \tilde{z}(t_0) = A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x^0 + z^0 = \tilde{z}^0,$$

которая аппроксимирует исходной системы (1) с точностью $O(\mu)$ и при этом имеет место соотношения

$$\lim_{\mu\to 0}\tilde{z}(t,\mu) = 0 \text{ или } \lim_{\mu\to 0}\bar{z}(t,\mu) = -A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x^0(t) = \bar{z}^0(t),$$

$$\left\|z^0(t) - \bar{z}^0(t)\right\| = O(\mu) \text{ , где } z^0(t) = -A_4^{-1}(t)A_3(t).$$

Действительно, система $\dot{\bar{Y}}(t,t_0,\mu) = A_*(t,\mu)\bar{Y}(t,t_0,\mu)$, $\bar{Y}(t_0) = Y^0$,

где $\bar{Y} = \begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{z}\end{pmatrix}$,

в развернутом виде записывается как

$$\dot{\bar{x}} = A_0(t)\bar{x},, \ \bar{x}(t_0) = x^0,$$

$$\dot{\bar{z}} = -A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)A_0(t)\bar{x} + \frac{1}{\mu}A_3(t_0)\bar{x} + \frac{1}{\mu}A_4(t_0)\bar{z} \ ,\bar{z}(t_0) = z^0.$$

Из второго уравнения имеем $\frac{d}{dt}\left(\bar{z} + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)\bar{x}\right) = \frac{1}{\mu}A_4(t_0)\left(\bar{z} + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)\bar{x}\right).$

Если ввести обозначения $\tilde{z} = \bar{z} + A_4^{-1}(t_0)A_4(t_0)\bar{x}$, то сразу получается система (42). Из соотношения $\bar{Y}(t,t_0,\mu) = Y_0(t,t_0,\mu)Y^0$ получим

$$\bar{x}(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A_0(\lambda)d\lambda}x^0 \ , \ \tilde{z}(t,\mu) = e^{A_4(t_0)\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)}\tilde{z}^0.$$

По условию собственные значения матрицы $A_4(t)$ удовлетворяет неравенству (3) и отсюда следует, что $\tilde{z}(t,\mu)\to 0$ при $\mu\to 0$ или $\bar{z}(t,\mu)\to z^0(t)$.

Кроме того, из равномерной ограниченности и непрерывности матрицы $A_3(t), A_4(t)$ в окрестности точки $t = t_0$ при малых μ и справедливо представление $z^0(t) = \bar{z}^0(t) + O(\mu)$. ч.т.д.

Следует отметить, что вектор переменного состояния сопряженного уравнения соответствующая уравнению (1) содержит малый параметр μ. Это утверждается следующей теоремой.

Теорема 3. Сопряженным уравнением соответствующее уравнению

$\dot{Y}(t,\mu) = A(t,\mu)Y(t,\mu)$, где $A(t,\mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \dfrac{A_3(t)}{\mu} & \dfrac{A_4(t)}{\mu} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$, μ - малый параметр, является уравнение $\dot{\psi}(t,\mu) = -A'(t,\mu)\psi(t,\mu)$,

где $A'(t,\mu) = \begin{pmatrix} A_1'(t) & \dfrac{A_3'(t)}{\mu} \\ A_2'(t) & \dfrac{A_4'(t)}{\mu} \end{pmatrix}$, $\psi(t,\mu) = \begin{pmatrix} p \\ \mu q \end{pmatrix}$.

Доказательство. Вектор $\psi(t,\mu) = \begin{pmatrix} p \\ \mu q \end{pmatrix}$ является сопряженным вектору $y(t,\mu) = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ тогда и только тогда, когда $\psi' \cdot y = const$ или $p'x + \mu q'z = const$.

Дифференцируя сумму $p'x + \mu q'z$ получим

$$\frac{d}{dt}(p'x+\mu q'z) = \frac{d}{dt}(p'x) + \mu\frac{d}{dt}(q'z) = \dot{p}'x + p'\dot{x} + \mu\dot{q}' + \mu q'\dot{z} = p'(A_1x + A_2z) - (p'A_1 + q'A_3)x +$$
$$+ q'(A_3x + A_4z) - (p'A_2 + q'A_4)z = p'(A_1 - A_1)x + p'(A_2 - A_2)z + q'(A_4 - A_4)z = 0.$$

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -a_3x_3,\ \mu\dot{x}_3 = -x_3, \tag{43}$$

с начальными условиями $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\mu} \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -a_3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = -\frac{1}{\mu},$$

$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Переходную матрицу $Y(t,0,\mu)$ системы (43) можно определить как решение матричного дифференциального уравнение

$$\dot{Y}(t,0,\mu) = A(t,\mu)Y(t,0,\mu)\,,\ Y(0,0,\mu) = E_{2+1} \qquad (44)$$

Матрицу $Y(t,0,\mu)$ найдем по алгоритму как показано выше и представим ее в виде:

$$Y(t,0\mu) = \begin{pmatrix} 1 & t & -a_3\mu t + a_3\mu^2 - a_3\mu^2 e^{-\frac{t}{\mu}} \\ 0 & 1 & -\mu a_3 + \mu a_3 e^{-\frac{t}{\mu}} \\ 0 & 0 & \mu e^{-\frac{t}{\mu}} \end{pmatrix}. \qquad (45)$$

Тогда решение системы (43) с учетом (45) имеет вид:

$$x_1(t,\mu) = 1 + t - a_3\mu t + a_3\mu^2 - a_3\mu^2 e^{-\frac{t}{\mu}},\ x_2(t,\mu) = 1 - a_3\mu + a_3\mu e^{-\frac{t}{\mu}},\ x_3(t,\mu) = e^{-\frac{t}{\mu}}.$$

Это есть точное решение системы (43).

Если положить $\mu = 0$ в системе (43), то получим решение которые называется вырожденной

$$\bar{x}_1(t) = 1 + t,\ \bar{x}_2(t) = 1,\ \bar{x}_3(t) = 0\,. \qquad (46)$$

Рассмотрим приближенное решение системы (43). С учетом (39) имеем

$$\tilde{Y}(t,0,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{t}{\mu}} \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы (43) можно записать в виде:

$$\tilde{x}_1(t,\mu) = 1 + t\,,\ \tilde{x}_2(t,\mu) = 1,\ \tilde{x}_3(t,\mu) = e^{-\frac{t}{\mu}}. \qquad (47)$$

На рис.1 показаны графики переменного состояния $x_3(t)$, решения системы (43) при различных значениях параметра μ.

Решение $\tilde{x}_i(t,\mu)$ содержит пограничную функцию и в отличие от $\bar{x}(t)$ - вырожденного решение системы (43), оно удовлетворяет заданному начальному условию. При $\mu \to 0$ пограничная функция экспоненциально затухает и $\tilde{x}_i(t,\mu) \to \bar{x}_i(t)$, (i=1,2,3).

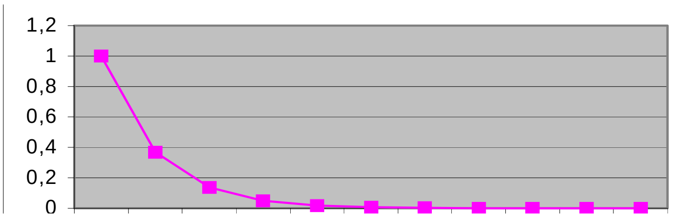

Рис.1

Таким образом, функция $\tilde{x}(t,\mu)$ является равномерным асимптотическим приближением для $x(t,\mu)$ с точностью μ.

В заключении следует отметить, что асимптотика переходной матрицы полной системы построена в форме расщепления на несколько матриц меньшей размерности, причем только двое из них являются определяющими, что позволяет уменьшить обьем вычислительных работ

ЛИТЕРАТУРА

1. ВАСИЛЬЕВА А.Б.. **Успехи математических наук**. 1963. 18. №3. С. 15-86.
2. ВИШИК М.И.., ЛЮСТЕРНИК Л.А. **Успехи математических наук**. 1957. 12. №5. С. 3-12.
3. ВАСИЛЬЕВА А.Б.., БУТУЗОВ В.Ф.. **Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений**:- М. Высш.шк., 1973, 272с.
4. ВАСИЛЬЕВА А.Б.., ДМИТРИЕВ М.Г.. **Итоги науки и техники**. Сер. Матем. анализ. Т.20 –М. ВИНИТИ, 1982. С.3-77.
5. БЕЛОКОПЫТОВ С.В., ДМИТРИЕВ М.Г.. **Известия АН.СССР**. Сер. Технич. кибернет. 1985. №3. С.147-152.
6. КОБРИН А.И.. **Прикладная математика и механика**. 1969. 33. Вып.3. С. 431-440.
7. БЕЛЯНИН М.П.., ВАСИЛЬЕВА А.Б.. **Вычисл. Матем. и матем. физ**. 1988. 28. №2. С.224-236.
8. НЕФЕДОВ Н.Н. Вестник МГУ. **Сер. Вычисл. Матем и кибернетика**. 1978. №1. С. 28-35.
9. НЕФЕДОВ Н.Н.. **Вычисл. Матем и матем. физ**. 1978. 18. №1. С.94-105.
10. МОИСЕЕВ Н.Н.. **Математические задачи системного анализа**.-М.: Наука, 1981, 488с.
11. ИМАНАЛИЕВ З.К., АШИРБАЕВ Б.Ы. **В сб: Международной научной конференции посвященной 70 летию академика М.И. Иманалиева**.-Бишкек: КГНУ, 2001.- С. 235-239.
12. ИМАНАЛИЕВ З.К., ПАХЫРОВ З.П., АШИРБАЕВ Б.Ы., БАРАКОВА Ж.Т. **В сб.: Международной научной конференции «Современные техноло-гии и управления качеством образовании, науке и производстве»**.-Бишкек, 2001.-С. 244-250.