Dumlupınar Üniversitesi Sayı: 1

Fen Bilimleri Dergisi 1999

PARALEL HİPERYÜZEYLERDE YÖRÜNGE HORTUM KABUĞUNUN HACMİ

Hasan ES*

ÖZET

Paralel hiperyüzeyler teorisinin Kinematikteki bir uygulaması olan, yörünge hortumunun hacmini hesaplayabilmek için ,gerekli tanımları vermenin yanı sıra bu paralel hiperyüzeylerden birirnin hortumun iç, diğerinin de dış yüzey olması hali göz önüne alınarak, dış yüzeyin sınırladığı hacmi veren KOENIGS vidası ile iç yüzeyin sınırladığı hacmin aynı cins vidasının sayesinde hortum kabuğunun vidası da elde edildi.

ABSTRAC

In this paper, We gave the relations between any two parallel hypersurfaces. Moreover, we investigated and evaluated the length of curvature line of any two parallel hypersurfaces. We also calculated the volume of a tubular which is an orbit.

Giriş:

Paralel hiperyüzeylerden birine ait diferensiyel geometrinin diğeri üzerindeki korunan ve korunmayan yönleri son yıllarda önemli ve yoğun çalışmalara konu olmaktadır. Ayrıca bize göre yörünge hortumunun kinematiği de bu alana girmektedir. Bu çalışmada amacımız paralel hiperyüzeyler teorisinin yörünge hortumuna uygulamasını yapmaktır.

* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

E^n, n - boyutlu Öklid uzayının k - boyutlu bir M manifoldunu ele alalım. M bir manifold olduğuna göre M nin her bir x noktasındaki $T_M(x)$ tanjant uzayında bir μ_x orientasyonu tanımlamak istiyoruz. Bu işi bir reel vektör uzayındaki gibi aynen yapabiliriz. Ancak manifoldun her bir noktasında $T_M(x)$ için bir başka vektör uzayı söz konusudur. Bu nedenle her biri için bir orientasyon söz konusudur. Eğer M nin herbir noktasındaki tanjant uzaylarda orientasyon aynı ise M manifolduna uygun yönlendirilmiş manifold aksi taktirde M manifolduna uygun yönlendirilmemiş manifold (Hacısalihoğlu, 1983) denir.

n - boyutlu Öklid uzayı E^n de sınırlı (yada sınırlı olmayan) μ yönlü k - manifold M olsun . $x \in M$ noktasındaki μ_x yönü ile T_x iç çarpımı bir k - form $w(x) \in \wedge^k(T_M(x))$ olan hacim elementini belirtir. $w \neq 0$ k - formuna M üzerinde μ tarafından belirtilen hacim elementi denir ve dv ile gösterilir. Bu k - form genel olarak bir $(k-1)$ formun diferensiyeli olması gerekmez.

M nin hacmi diye $\int_M dv$ integraline denir. Eğer M kompakt ise integralin mevcut olacağı biçimde dv belirtilir (Hacısalihoğlu, 1983).

M ve M_r, E^n, n - boyutlu Öklid uzayının $(n-1)$ boyutlu iki hiperyüzeyi olsun. M' nin birim normal vektör alanının

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in C^\infty(M,R), \quad 1 \leq i \leq n$$

olduğunu varsayalım. Eğer , bir $r \in R$ sabit sayısı ve $\forall p \in M$ için

$$\overrightarrow{of}(p) = \overrightarrow{op} + \overrightarrow{pf}(p)$$
$$f(p) = p + r\,N(p)$$

olacak şekilde bir

$$f: M \to M_r$$

fonksiyonu bulunabilirse, M_r' ye M' nin bir paralel hiperyüzeyi denir. Burada

$$M_r = \{\, p + r\,N(p) \mid p \in M \,\}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Yörünge Hortum Kabuğunun Hacmi

E^n, n - boyutlu Öklid uzayında hareketli H uzayının pozitif yönlü $\{O;E_i\}$ ortonormal eksen sistemi ve sabit H' uzayını da pozitif yönlü $\{O';E_i'\}$ ortonormal eksen sistemi ile gösterelim. Ayrıca H nın H' ye göre $H\backslash H' = B$ hareketini, H_1 uzayı ile gösterilen bir üçüncü pozitif yönlü $\{Q;R_i\}$ ortonormal sisteminde ifade edelim (rölatif sistem).

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{q}\,,\quad \overrightarrow{O'Q} = \vec{q}\,'$$

dersek,

$$\vec{q} = q_1R_1 + q_2R_2 + \ldots + q_nR_n$$

$$\vec{q}\,' = q_1'\,R_1 + q_2'\,R_2 + \ldots + q_n'\,R_n$$

$$d\,\vec{q} = w_1^*R_1 + w_2^*R_2 + \ldots + w_n^*R_n = \sum_{i=1}^{n} w_i^*R_i$$

$$d\,\vec{q}\,' = w_1'^*R_1 + w_2'^*R_2 + \ldots + w_n'^*R_n = \sum_{i=1}^{n} w_i'^*R_i$$

olur. Eğer bir $x \in H_1$ noktasının $\{Q;R_i\}$ sistemine göre koordinatları $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ise

$$\vec{X} = X^T R$$

$$\vec{X} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QX} = \vec{q} + X^T R$$

$$\vec{X}' = \overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'Q} + \overrightarrow{QX} = \vec{q}\,' + X^T R$$

Öte yandan

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix},\quad E' = \begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ \vdots \\ E_n' \end{bmatrix},\quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$A: R \to O(n) = \{A \mid A A^T = A^T A = I_n\}$$

$$t \to A(t)$$

ve

$$A' : R \rightarrow O(n) = \{ A' \,|\, A' \; A'^T = A'^T \; A' = I_n \}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

Hareketli ve sabit uzaylarımızın ortonormal eksen sistemlerini bir noktada düşünürsek üçü de birer ortonormal bazdır. Bu baz vektörlerinin herbirinin uç noktaları birim hiper küre üzerindedir.

Dolayısıyla,

$$E_1 = a_{11}R_1 + a_{12}R_2 + \dots + a_{1n}R_n$$
$$E_2 = a_{21}R_1 + a_{22}R_2 + \dots + a_{2n}R_n$$
$$\vdots$$
$$E_n = a_{n1}R_1 + a_{n2}R_2 + \dots + a_{nn}R_n$$

dir. Bunu matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

veya kısaca

$$E = AR$$

olur. Aynı şekilde

$$E' = A'R$$

yazılabilir.

$$A \in O(n) \Rightarrow A\,A^T = A^T A = I_n$$
$$A' \in O(n) \Rightarrow A' \; A'^T = A'^T \; A' = I_n$$

dir. Buradan ilk eşitliğin her iki yanının diferensiyeli alınırsa,

$$d\,(A^T A) = d\,(I_n)$$
$$d\,A^T A + A^T dA = 0$$
$$d\,A^T A = \Omega\,,\ \Omega^T = A^T Da$$

elde edilir. Ayrıca, $\Omega + \Omega^T = 0 \Rightarrow \Omega^T = -\Omega$ eşitliği sağlandığından Ω, nxn tipinde antisimetrik bir matristir. Benzer şekilde,

$$A'^T A' = I_n$$
$$\delta(A'^T A') = \delta(I_n)$$
$$\Omega' + \Omega'^T = 0 \Rightarrow \Omega' = -\Omega'^T$$

eşitliği sağlandığından Ω', nxn tipinde antisimetrik matristir.

$$E = AR \text{ ve } E' = A'R$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$E = AR \Rightarrow R = A^T E$$
$$E' = A'R \Rightarrow R = A'^T E'$$

elde edilir.

$K_l \setminus K$ küresel hareketinin denklemi

$$R = A^T E$$
$$dR = \Omega R$$

dir.

Benzer şekilde $K_l \setminus K'$ küresel hareketinin denklemi de

$$R = A'^T E'$$
$$\delta R = \Omega' R$$

olur. Böylece, $x \in H_l$ noktasının $H_l \setminus H$ daki değişimi

$$\vec{X} = \vec{q} + X^T R$$

$$d\vec{X} = (w^{*T} + X^T \Omega)R + dX^T R$$

olur. Benzer şekilde,

$x' \in H_l$ noktasının $H_l \setminus H'$ daki değişimi

$$\vec{X}' = \vec{q}' + X^T R$$

$$\delta \vec{X}' = (w'^{*T} + X^T \Omega')R + \delta X^T R$$

bulunur. Burada, Ω ve Ω' matrisleri; $H_l \setminus H$, $H' \setminus H_l$ uzay hareketlerinin, dönme kısımlarına ait Darboux tensörüne karşılık gelen matrislerdir. $x \in H_l$ noktası sabit ise $dX^T = 0$ olur. O zaman,

$$d\vec{X} = (w^{*T} + X^T \Omega)R$$

dir. Benzer şekilde,

$$\delta\vec{X}' = (w'^{*T} + X^T \Omega')R$$

elde edilir.

Eğer x noktası H da sabit ise $d\vec{X} = 0$ olacağından bu değişmeye (H' ye göre değişimi) x noktasının sürüklenme hızı denir. Sürüklenme hızını $d_f\vec{X}$ ile gösterelim. Ayrıca,

$$d_f\vec{X} = \delta\vec{X}' - d\vec{X}$$

şeklinde ifade edilir.

$$d_f\vec{X} = (w'^* - w^*)^T R + X^T(\Omega' - \Omega)R$$

olur. $\Omega' - \Omega$ antisimetrik matris olduğundan

$$\Omega' - \Omega = \Psi$$

dersek,

$$d_f\vec{X} = [(w'^* - w^*)^T + X^T \Psi]R$$

$$d_f X^T R = [(w'^* - w^*)^T + X^T \Psi]R$$

olur. Böylece, sürüklenme hızının matris şeklindeki ifadesi

$$d_f X^T = (w'^* - w^*)^T + X^T \Psi$$

elde edilir. Burada $w'^* - w^*$ kolon matrisi Darboux tensörünün Q noktasına göre moment vektörünün matrisidir. Bunu

$$\Psi^* = w'^* - w^*$$

matrisi ile gösterirsek,

$$d_f X^T = \Psi^{*T} + X^T \Psi$$

olur ve her iki tarafın traspozunu alırsak,

$$d_f X = \Psi^* + \Psi^T X$$

elde edilir. $(n-1)$ gerçel parametreli,

$$\vec{X} = \vec{X}(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$$
$$= x_1(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_n}$$

vektörü ile verilen E^n deki M regüler hiperyüzeyi için,

$$d\vec{X}\wedge \ldots \wedge d\vec{X} = (n-1)!\,\vec{N}\left\|\vec{X}_{u_1}\wedge \ldots \wedge \vec{X}_{u_{n-1}}\right\| du_1\wedge \ldots \wedge du_{n-1}$$

dir. Verilen hiperyüzeyin dA skaler hiperalan elementi

$$dA = \left\|\vec{X}_{u_1}\wedge \ldots \wedge \vec{X}_{u_{n-1}}\right\| du_1\wedge \ldots \wedge du_{n-1}$$

ve $d\vec{A}$ vektörel hiperalan elementi de

$$d\vec{A} = \frac{1}{(n-1)!}(d\vec{X}\wedge \ldots \wedge d\vec{X})$$

olarak tanımlanır.

Öte yandan $x \in H_I$ noktasının H' ye göre hareketini vektörel olarak

$$d_f\vec{X} = \vec{\Psi}^* + \vec{\Psi}\wedge \vec{X}$$

yazabiliriz.

Kapalı bir $H \setminus H' = B$ uzay hareketinde hareketli H uzayındaki çevre eğrisi ∂M olan bir hiperyüzey parçası tesbit edelim. Bu hiperyüzey parçası $H \setminus H' = B$ hareketinde H' sabit uzayında genel olarak hipertor biçiminde bir uzay parçası resmeder. Biz bu uzay parçasına M nin yörünge hortumu diyoruz. Bu uzay parçası Φ ile gösterilirse Φ nin yörünge hortumunun dv hiperhacim elemanını

$$dv = \langle d_f\vec{X}, d\vec{A}\rangle$$

şeklinde tanımlıyoruz.

$$dv = \frac{1}{(n-1)!}\langle \vec{\Psi}^*, d\vec{X}\wedge \ldots \wedge d\vec{X}\rangle + \frac{1}{(n-1)!}\langle \vec{\Psi}\wedge \vec{X}, d\vec{X}\wedge \ldots \wedge d\vec{X}\rangle$$

olur.

$$v = \frac{1}{(n-1)!} \int_B \int_M < \vec{\Psi}^*, d\vec{X} \wedge ... \wedge d\vec{X} >$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_B \int_M < \vec{\Psi} \wedge \vec{X}, d\vec{X} \wedge ... \wedge d\vec{X} > \qquad (*)$$

$(n-1)$ gerçel parametreli,

$$\vec{X} = \vec{X}(u_1, u_2, ..., u_{n-1})$$
$$= x_1(u_1, u_2, ..., u_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + x_n(u_1, u_2, ..., u_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

vektörü ile verilen E^n deki M regüler hiperyüzeyi için,

$$d\vec{X} \wedge ... \wedge d\vec{X} = (n-1)!\, \vec{N}\, dA$$

dır. Bu ifadeyi (*) da yerine yazarsak

$$v = \int_B \int_M < \vec{\Psi}^*, \vec{N} > dA + \int_B \int_M < \vec{\Psi} \wedge \vec{X}, \vec{N} > dA$$

$$v = \int_M < \int_B \vec{\Psi}^*, \vec{N} > dA + \int_M < \int_B \vec{\Psi} \wedge \vec{X}, \vec{N} > dA$$

elde edilir.

M ve M_r parele hiperyüzeyler için

$$\vec{Y} = \vec{X} + r\vec{N}$$

$$d_f \vec{X} = \vec{\Psi}^* + \vec{\Psi} \wedge \vec{X}$$

$$d_f \vec{Y} = \vec{\Psi}^* + \vec{\Psi} \wedge \vec{Y}$$
$$= d_f \vec{X} + r\vec{\Psi} \wedge \vec{N}$$

elde edilir.

M ve M_r nin vektörel alan elementleri için

$$d\vec{A} = \frac{1}{(n-1)!} (d\vec{X} \wedge ... \wedge d\vec{X}) = \vec{N}\, dA$$

$$d\vec{A}_r = \frac{1}{(n-1)} d\vec{Y} \wedge ... \wedge d\vec{Y} = \vec{N}\, dA_r$$

ve hacim elementleri için

$$dv = < d_f\vec{X},\ d\vec{A} >$$

$$dv_r = < d_f\vec{Y}, d\vec{A}_r >$$

dir. $d_f\vec{Y} = d_f\vec{X} + r\vec{\Psi}\wedge\vec{N}$ olduğundan

$$dv_r = < d_f\vec{X} + r\vec{\Psi}\wedge\vec{N},\ d\vec{A}_r >$$

yazılabilir. Bu ifadelerde

$$d_f\vec{X} = \vec{\Psi}^* + \vec{\Psi}\wedge\vec{X}$$

değerleri yerlerine yazılır ve integral alınırsa M' nin sınırladığı hortumun hacmi için

$$v = \int_M [< \int_B \vec{\Psi}^* + \int_B \vec{\Psi}\wedge\vec{X}, \vec{N} > dA]$$

ve benzer şekilde M_r hiper yüzeyinin sınırladığı hortumun hacmi için

$$v_r = \int_{M_r} [< \int_B \vec{\Psi}^* + \int_B \vec{\Psi}\wedge\vec{Y}, \vec{N} > dA_r]$$

yazılabilir. Hortum kabuğunun hacmi ise, M ve M_r aynı parametrelerle tanımlanabileceğinden,

$$v_r - v = \int_{M_r} \{< \int_B \vec{\Psi}^* + \int_B \vec{\Psi}\wedge\vec{Y}, \vec{N} > dA_r\} -$$

$$\int_M \{< \int_B \vec{\Psi}^* + \int_B \vec{\Psi}\wedge\vec{X}, \vec{N} > dA\}$$

olarak yazılabilir.

$n = 3$ özel durumunda

$$v = \frac{1}{2}\int_M < \int_B \vec{\Psi}^*, d\vec{X}\wedge d\vec{X} > + \frac{1}{2}\int_M < \int_B \vec{\Psi}\wedge\vec{X},\ d\vec{X}\wedge d\vec{X} >$$

$$= < \int_B \vec{\Psi}^*, \frac{1}{2}\int_M d\vec{X}\wedge d\vec{X} > + < \int_B \vec{\Psi}, \frac{1}{2}\int_M \vec{X}\wedge(d\vec{X}\wedge d\vec{X}) >$$

olur. Burada

$$\int_B \vec{\Psi}^* = \vec{k}^* \ , \ \int_B \vec{\Psi} = \vec{k}$$

ve M ile M_r hiperyüzeyleri için, sıra ile,

$$\frac{1}{2}\int_M d\vec{X} \wedge d\vec{X} = \vec{h} \ , \quad \frac{1}{2}\int_M d\vec{X} \wedge (\vec{X} \wedge d\vec{X}) = \vec{h}^*$$

$$\frac{1}{2}\int_{M_r} d\vec{Y} \wedge d\vec{Y} = \vec{\bar{h}} \ , \quad \frac{1}{2}\int_{M_r} d\vec{Y} \wedge (\vec{Y} \wedge d\vec{Y}) = \vec{\bar{h}}^*$$

alırsak, Φ yörünge hortumunun v hacmi,

$$\left(\vec{h}, \vec{h}^*\right) \ , \ \left(\vec{k}, \vec{k}^*\right)$$

vidalarının,

$$v = < \vec{h}, \vec{k}^* > + < \vec{h}^*, \vec{k} >$$

momenti ile verildiğini biliyoruz (Müller, 1963). Benzer şekilde v_r hacmi için de

$$v_r = < \vec{\bar{h}}, \vec{k}^* > + < \vec{\bar{h}}^*, \vec{k} >$$

olur. Hortum kabuğunun hacmi ise

$$v_r - v = < \vec{\bar{h}} - \vec{h}, \vec{k}^* > + < \vec{\bar{h}}^* - \vec{h}^*, \vec{k} >$$

olarak yazılabilir. Şu halde hortum kabuğunun hacmi

$$\left(\vec{\bar{h}} - \vec{h}, \vec{\bar{h}}^* - \vec{h}^*\right) \ , \ \left(\vec{k}, \vec{k}^*\right)$$

vidalarının $v_r - v$ momenti olmuş olur.

KAYNAKLAR

Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983.

Kosif, C., Manifoldlar üzerinde İntegrasyon teorisi ve Parelel hiperyüzeylerde Hacim, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Doktora tezi, 1981.

Müller, H. R., Kinematik Dersleri (Tercüme), Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, 1963.