



DEĞİŞKEN KESİTLİ KİRİŞLERDE ELASTİK EĞRİNİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE HESABI

Mustafa Halûk SARAÇOĞLU, Mahmud Sami DÖVEN, Burak KAYMAK

Dumlupınar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Kütahya,
mhaluk.saracoglu@dpu.edu.tr, msami.doven@dpu.edu.tr, burak.kaymak@dpu.edu.tr

ÖZET

Değişken kesitli kirişler, inşaat, makine, havacılık ve uzay gibi mühendislik alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada, değişken kesitli kirişlerde çökmeler ile buna sebep olan dış yükler arasında kurulan dördüncü dereceden diferansiyel denklemler sonlu farklar yöntemi ile çözümlenmiştir. Bu amaçla bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Literatürde konu ile ilgili yer alan örneklerin geliştirilen bilgisayar programı ile çözümü sonucunda sonlu fark bölüm sayısı ile değişken kesitli kirişin belirli noktasındaki çökme değeri arasındaki ilişkiler tablo ve grafikler şeklinde sunulmuştur. Bu sonuçlar sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Değişken kesitli kiriş, çökme, elastik eğri, sonlu farklar yöntemi.*

DETERMINING THE ELASTIC CURVES OF BEAMS HAVING VARIABLE SECTIONS BY FINITE DIFFERENCE METHOD

ABSTRACT

Beams with variable thickness are commonly used in engineering fields such as civil, mechanical and aerospace engineering. In this study, relation between the deflection of beams with variable thickness and load is expressed as fourth order differential equations and calculated by finite difference method. Calculations were made by a developed computer program. Relationship between finite difference mesh number and deflection value at the specific point of beam with variable thickness were presented in tables and graphs as a result of the solutions of examples by developed computer program. Results have been compared with the ones obtained from the finite element analysis.

Keywords: *Beams with varying cross section, deflection, elastic curve, finite difference method.*

1. GİRİŞ

Mühendislik bilimleri alanlarındaki problemler Kısmî Diferansiyel Denklemler kurularak matematiksel olarak modellenir. Modellenen bu problemlerin çözümü için uygulanan çeşitli sayısal yöntemler vardır. Bu yöntemlerin başında Sonlu Farklar Yöntemi, Sınır Eleman Metodu, Sonlu Elemanlar Metodu gelmektedir. Sonlu farklar yönteminde sınır şartlarının gerçekleşmesi kesin iken diferansiyel denklemin sağlanması yaklaşıktır. Tüm yöntemlerde sonuca ulaşabilmek için oluşturulan doğrusal denklem takımları bir şekilde çözülmelidir. Bilgisayarların kullanılmasıyla denklem takımı çözümleri kısa sürede elde edilebilmektedir.

Programlama tekniğine ve problemin tipine bağlı olarak değişen denklem takımlarının çözümleri birbirlerine göre çeşitli farklılıklar göstermektedir.

Sonlu farklar yöntemi kullanılarak oluşturulan doğrusal denklem takımlarında katsayı matrisi bant matris özelliği göstermektedir. Sonlu farklar yönteminin bir özelliği olarak sonlu fark bölüm sayısı ile elde edilen yaklaşık çözümün doğruluğu arasında bir ilişki vardır. Sonlu fark bölüm sayısı ne kadar fazla ise elde edilen yaklaşık çözüm de doğruya o kadar yakındır. Bu durum sonucunda oluşturulan katsayılar matrisinin büyüklüğü artar. Kabul edilebilir doğruluğa sahip sonuçlar elde etmek için sonlu farklar yöntemi çok sayıda düğüm noktası ile analiz yapmayı gerektirmektedir. Gerekli bilgisayar kapasite ihtiyacı doğrusal denklem takımının büyüklüğü ile orantılı olarak artar. Ancak, iyi bir programlama tekniği ile bu ihtiyaç azaltılabilir. Diğer yöntemlerden farklı olarak sonlu farklar yönteminde katsayı matrislerinin sıfır değerine sahip eleman sayısının fazla olması bu çalışmada geliştirilen programın bir avantajı olarak kullanılmıştır.

Mühendisliğin pek çok alanında karşılaşılabilen değişken kesitli kirişler için bugüne kadar pek çok araştırmacı bu konuda çalışmalar yapmışlardır. Daha çok sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan bu çalışmalar arasında sonlu farklar yöntemi kullanılarak yapılanlar çok fazla değildir [1-17].

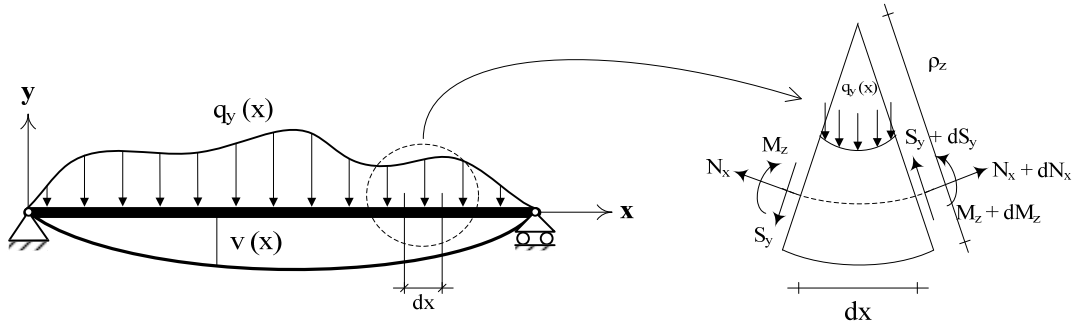
S. Li, J. Hu, C. Zhai ve L. Xie yaptıkları çalışmada; uyarlanabilir deplasman enterpolasyon fonksiyonlu kiriş elemanı kullanarak bazı analizler gerçekleştirmişlerdir. Değişken kesitli, değişken malzeme özellikli gibi farklı örnekler çözerek sonuçları irdelemişlerdir [1]. S. T. Wasti, yaptığı çalışmada eni sabit fakat yüksekliği doğrusal olarak değişen prizmatik olmayan bir elemanı çok sayıda prizmatik elemanla modelleyerek analiz etmiş ve kabul edilebilir düzeyde sonuçlar almıştır [2]. T. Tankut, kirişsiz döşeme yapıların hesabı için yeni bir yöntem isimli çalışmasında, deney sonuçlarını değişken kesitli kiriş kavramına dayanarak değerlendirmiş ve oldukça gerçekçi sonuçlar elde etmiştir [4]. Cook R. D. vd., değişken kesitli bir konsol kirişin sonlu elemanlar metodu ile analizi için problemin her birisi sabit kesitli olan çok sayıda elemana ayırarak modellenebileceğinden söz etmişlerdir [5]. Xu Y. ve Zhou D., çalışmalarında statik yükler altında iki ucundan basit mesnetli çok açıklıklı ve değişken kesitli kirişlerin gerilme ve yer değiştirme hesaplarını yapmışlardır [6]. Aynı yazarlar bir başka çalışmalarında, basit mesnetli değişken kesitli piezoelektrik kirişlerini boyutlu analizlerini yapmışlardır [7]. F. Romano ve G. Zingone, doğrusal ve (binom şeklinde) parabolik olarak değişen derinlikte ve doğrusal olarak değişen genişlikte eğilme kirişleri için kapalı-form çözümler sunmuşlardır [8]. Z. Girgin, E. Demir ve C. Kol, Doğrusal değişken kesitli bir kirişin titreşim problemini genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ile incelemişlerdir [9]. A.K. Ashok ve S.B. Biggers çalışmalarında; Newmark'ın sayısal yöntemini kullanarak prizmatik olmayak kiriş-kolon elemanları için rijidlik matrisi üreten bir algoritma sunmuşlardır. Bu algoritma ile bir bilgisayar programı geliştirilerek elde ettikleri sonuçların uygun olduğu sonucuna ulaşmışlardır [10]. H. Al-Gahtani ve M. Khan, genel sınır koşullarındaki prizmatik olmayan kirişler için kesin analiz sunmuşlardır. Doğrusal ve parabolik olarak değişen kesitlerdeki kirişler için temel çözümler elde etmiş ve sonuçları iki sayısal örnek ile test etmişlerdir [11]. T.J. Kotas çalışmasında; düşey yükleme altında düzgün olmayan eğilme rijidliklerine sahip hiperstatik kirişlerin analizi için oldukça rahat bir yöntem geliştirmiştir. Buna göre kirişlerde iki nokta sınır değer problemi çözümü için sayısal çözüm tekniğini sunmuştur [12]. R. Attarnejad ve A. Shahba yazdıkları makalede prizmatik olmayan döner kirişlerin serbest titreşim analizinde diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanmasını açıklamışlardır. Çalıştıkları kirişler Euler-Bernoulli kirişleridir. Bu yöntemle göre kiriş boyunca herhangi iki keyfi fonksiyonla değişen kesit alanı ve atalet momenti modellenenilmektedir. Bundan dolayı bu yöntem pek çok mühendislik uygulamasında kullanılabilir [13]. M. Veiskarami ve S. Pourzeynali, analitik bir yaklaşımla değişken kesitli basit kirişlerin çökmesi için tesir çizgisi geliştirmişlerdir. Bunun için Green'in fonksiyonunu uygulamışlardır [14]. M. Brojan, T. Videnic ve F. Kosel, çalışmalarında özel malzemelerden üretilmiş farklı fonksiyonlarla tanımlanmış değişken kesitli konsol kirişlerin şekil değiştirmelerini ve büyük yer değiştirmelerini incelemişlerdir [15]. M. Brojan, M. Cebron ve F. Kosel,

doğrusal olmayan elastik malzemeden yapılmış prizmatik olmayan konsol kirişlerin büyük deplasmanlarını çalışmışlardır. Elde ettikleri nümerik sonuçlar ile daha önceden yapılmış olan çalışma sonuçları ve laboratuvar deneyleri sonuçları ile uyumlarını değerlendirmişlerdir [16]. S.A. Hamoush, M.J. Terro ve W.M. McGinley, aksenal ve düşey kuvvetlerin birlikte etki ettikleri prizmatik olmayan elemanların elastik ve elastik ötesi davranışlarını ortaya koymuşlardır. Değişken kesitli elemanların sehimlerini göstermek için eğim-sehim ilişkilerine dayanan sonlu fark tekniği uygulamışlardır [17].

Değişken kesitli kirişler havacılık ve uzay, makine, inşaat gibi mühendislik alanlarında sık olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada düşey yükü yüklenmiş değişken kesitli kirişlerde elastik eğriler incelenmiştir. Bilgisayarların gelişmesiyle yapılan analiz sonuçları kısa sürede elde edilebilmektedir. Bu avantaj kullanılarak, çalışma kapsamında C++ dili yardımıyla bir bilgisayar programı geliştirilmiş ve sonuçlar geliştirilen bu bilgisayar programı kullanılarak elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE METOT

Taşıyıcı çubuğun eksenine yükleme sonrasında ilk konumuna göre değişir ve elastik eğri adını alır. Taşıyıcı çubuk sistemlerin statik hesabında elastik eğri önemli bir yer tutar. Elastik eğri probleminde önemli olan çökme değerleri ($v(x)$) ile buna sebep olan yükler ($q_y(x)$) arasında bir bağıntı kurmaktır (Şekil 1).



Şekil 1. Eğilme kirişi ve “ dx ” boyundaki şekil değiştirme durumu.

Şekil 1 ' de görülen kirişte eğrilik diferansiyel geometriden

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan, kiriş teorisinden [18]

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (2)$$

olduğu bilinmektedir. Burada eğrilik yarıçapı ρ_z , eğilme momenti M_z ve eğilme rijitliği EI_z ile ifade edilmektedir. Denklem 2 'nin x 'e göre iki defa türevi alındığında elde edilen diferansiyel denklem kiriş eksenine dik olarak etki eden yayılı yük q_y 'nin bir fonksiyonu olarak ortaya çıkar:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{-q_y}{E I_z} \quad (3)$$

Sabit kesitli kirişlerde atalet momenti $I_z(x)$ sabit iken değişken kesitli kirişlerde atalet momenti, çökme fonksiyonu $v(x)$ ve eğilme momenti fonksiyonu $M_z(x)$ gibi “x” eksenine göre değişen bir fonksiyon olacaktır:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M_z}{E I_z} \right) \quad (4)$$

Çökmelerin türevleri, çubuğa ait geometrik ve mekanik tipten büyüklükler ile orantılıdır.

$v(x)$	çökmeler
$v'(x)$	eğimler veya kesit dönmeleri
$E I_z v''(x)$	M_z eğilme momenti
$E I_z v'''(x)$	$-S_y$ kesme kuvveti
$E I_z v^{IV}(x)$	$-q_y$ yayılı yükün şiddeti

Bir problemde çökme fonksiyonu $v(x)$ belirlenmiş ise, ardışık türevlerle eğimi, eğilme momentini, kesme kuvvetini ve düşey yükleri bulmak mümkündür. Bunun aksine, sayılan fonksiyonlardan her hangi biri verilmiş ise, yukarıya doğru entegrasyonla çıkmak mümkün olur; fakat her integral adımında denklemlere eklenecek yeni integral sabitlerini belirtmek gerekir; bunlar da ancak sınır şartlarından bulunabilir [18].

Eğer yük fonksiyonu biliniyorsa buna bağlı olarak eğilme momenti fonksiyonu $M_z(x)$ elde edilebilir. Atalet momenti $I_z(x)$ değişken kesitli kirişin değişim fonksiyonuna göre hesaplanmalıdır. Yüksekliği “x” eksenine göre değişen dikdörtgen kesitli bir kirişte atalet momenti kübik olarak değişecektir. Buradan çökme fonksiyonu $v(x)$ 'in dördüncü dereceden türevi, elde olunanlarla ifade edilebilir.

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M_z}{E I_z} \right) \quad (5)$$

Denklemler 5 'te verilen dördüncü dereceden diferansiyel denklemde çubuk eksenine dik doğrultudaki yer değiştirmeler (çökmeler: v) bilinmeyenlerdir. Denklemin çözümü için bu çalışmada sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Bu durumda Denklem 5 'in sonlu farklar yöntemindeki ifadesi şu şekildedir:

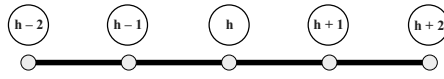
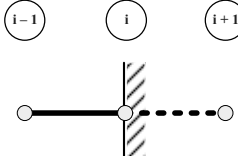
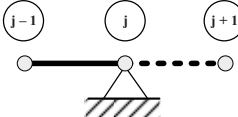
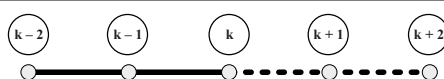
$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{v_{h-2} - 4v_{h-1} + 6v_h - 4v_{h+1} + v_{h+2}}{(\Delta x)^4} = -q_y(x) \quad (6)$$

Sonlu farklar yönteminde çözüm için diferansiyel denklem ayrıştırılır ve sayısal olarak çözülür. Türevlerin yerine sayısal değerlerin konulması ayrıklaştırma sonunda elde edilen düğüm noktalarındaki fonksiyon değerlerinin kullanılmasıyla olur. Bu şekilde düğüm noktasına bağlı olarak denklemler oluşturulur. Elde edilen bu denklemler doğrusal denklem takımı şeklinde çözülerek her nokta için bilinmeyen $v(x)$ değerleri elde edilir.

Sonlu farklar yönteminde sınır şartlarının gerçekleşmesi kesindir fakat diferansiyel denklemin sağlanması yaklaşıktır. Kirişlerin sonlu farklar yöntemine göre çözümünde ilk olarak kiriş belirli sayıda eşit parçaya bölünerek sonlu fark ağ noktaları oluşturulur. Kirişin mesnetlerindeki sınır şartlarına göre bazı sanal sonlu fark ağ noktalarına ihtiyaç olabilir. Bu durumda fiktif sonlu fark ağ noktaları için gerekli değerler gerçek sonlu fark ağ noktalarında yazılan değerler cinsinden tarif edilir (Çizelge 1).

Değişken kesitli kirişin sonlu farklarla çözümü için kiriş eksenî yönündeki bölüm sayısı “ n ” olmak üzere sonlu fark ağı oluşturulur. Sonlu farklar yönteminde bölüm sayısı arttıkça $v(x)$ değerleri kesin sonuca daha da yaklaşmaktadır. Değişken kesitli kirişte hesaplanan en büyük $v(x)$ değerleri ile “ n ” bölüm sayısı arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çizildiğinde teorik olarak grafik yataya teğet haline gelmesi gerekir. Bu teğetin grafiğin $v(x)$ eksenini kestiği değer en doğru $v(x)$ değeri olacaktır.

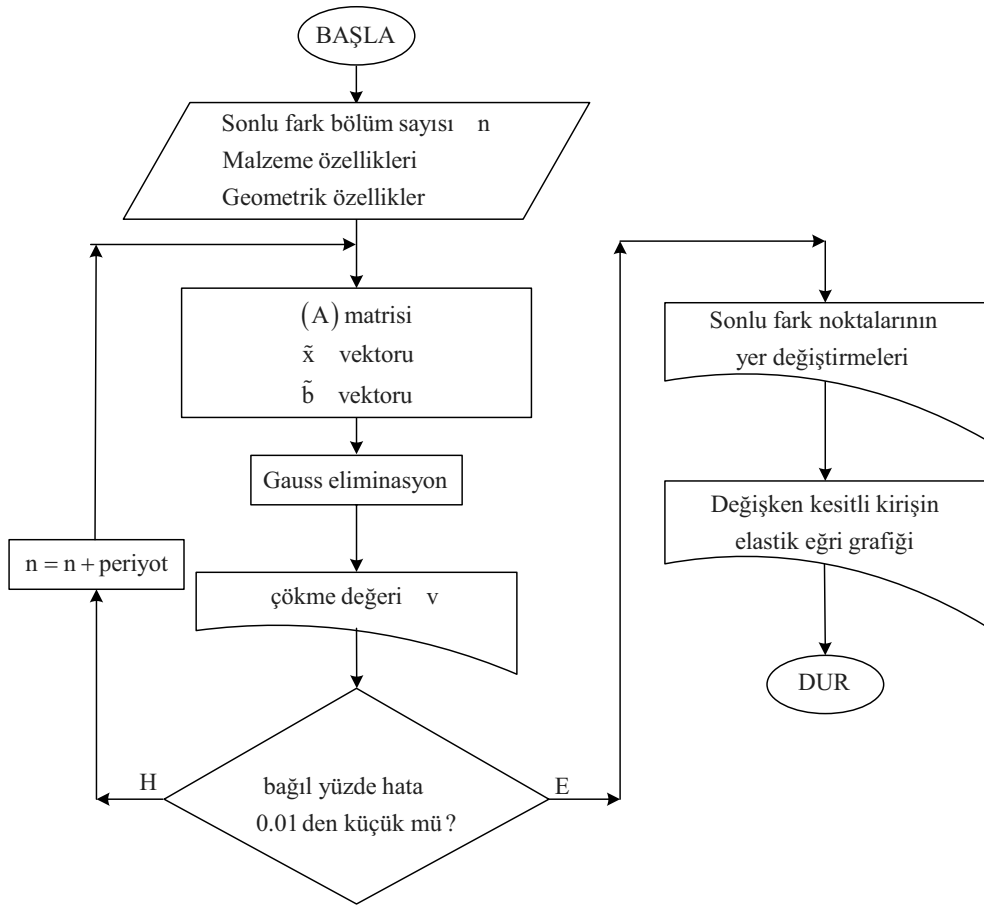
Çizelge 1. Dördüncü dereceden diferansiyel denklemin ve bazı sınır şartlarının sonlu fark ifadeleri.

	SINIR ŞARTI	SONLU FARK İFADESİ
Ara Nokta		$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{v_{h-2} - 4v_{h-1} + 6v_h - 4v_{h+1} + v_{h+2}}{(\Delta x)^4}$
Ankastre Mesnet		$v_{i+1} = v_{i-1}$
Sabit / Hareketli Mesnet		$v_{j+1} = -v_{j-1}$
Serbest Uç		$v_{k+1} = -v_{k-1} + 2v_k$ $v_{k+2} = v_{k-2} - 4v_{k-1} + 4v_k$

Sonlu farklar yöntemi ile değişken kesitli kirişlerde elastik eğrinin hesabı için C++ dilinde bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bu programın akış şeması Şekil 2’de verilmektedir. Geliştirilen bilgisayar programı ilk olarak dördüncü dereceden diferansiyel denklemi (Denklem 3) oluşturmaktadır. Bunun için ilk olarak kullanıcıdan sonlu fark bölüm sayısı “ n ” değerini almaktadır. Geliştirilen bilgisayar programı, sonlu fark bölüm sayısı “ n ” değerine göre katsayı matrisini, çökmelerin tutulacağı bilinmeyenler vektörünü ve karşı taraf bilinenler vektörünü oluşturmaktadır. Oluşturulan bu matrisler, dördüncü dereceden diferansiyel denklemin sonlu farklar ifadesine göre tarif edilmektedirler. Doğrusal denklem takımının katsayı matrisi, Çizelge 1’den de görülebileceği gibi $[1, -4, 6, -4, 1]$ katsayılarından oluşan bant genişliği 5 olan kare bir matristir. Bu matrisin başında ve sonunda bulunan bazı değerler sınır şartlarına göre farklılıklar gösterebilmektedir (Çizelge 1). Sağ taraf bilinenler vektöründe ise yük değeri q_y , eğilme rijitliği $E I_z$ ve sonlu fark ifadesindeki değişken kesitli kirişin uzunluğu “ L ” nin sonlu fark bölüm sayısı “ n ” ye bölümünden elde edilen $\Delta x = L/n$ değerinin dördüncü dereceden ifadesi $(\Delta x)^4$ yer almaktadır. Bilgisayar programının sistematik olarak oluşturduğu doğrusal denklem takımı Gauss Eliminasyon Yöntemine göre çözümlenmektedir. Buna göre doğrusal denklem takımının katsayı matrisi karşı taraf vektörü ile beraber üst üçgen hale getirilmekte ve daha sonra geriye doğru çözüm yapılarak bilinmeyenler elde edilmektedir.

Bir döngü ile sonlu fark bölüm sayısı “ n ” periyodik olarak arttırılarak hesaplanan $v(x)$ değerlerinden kritik olan değer elde edilmektedir. Hesaplanan $v(x)$ değerlerinin arasındaki bağıl yüzde hata ile kabul edilen hata sınır değeri tespit edilmektedir. Kabul edilen hata sınır değerine göre doğru değeri verecek olan sonlu fark bölüm sayısı “ n ” değerine bu şekilde karar verilmektedir.

Doğru değeri verecek olan sonlu fark bölüm sayısı “n” değerine göre program tekrar çalıştırılarak değişken kesitli kiriş boyunca çökme değerleri hesap edilmektedir. Hesaplanan bu değerlerden değişken kesitli kirişin elastik eğrisi grafik olarak çizilebilmektedir.



Şekil 2. Geliştirilen bilgisayar programının akış şeması.

3. ÖRNEKLER VE TARTIŞMA

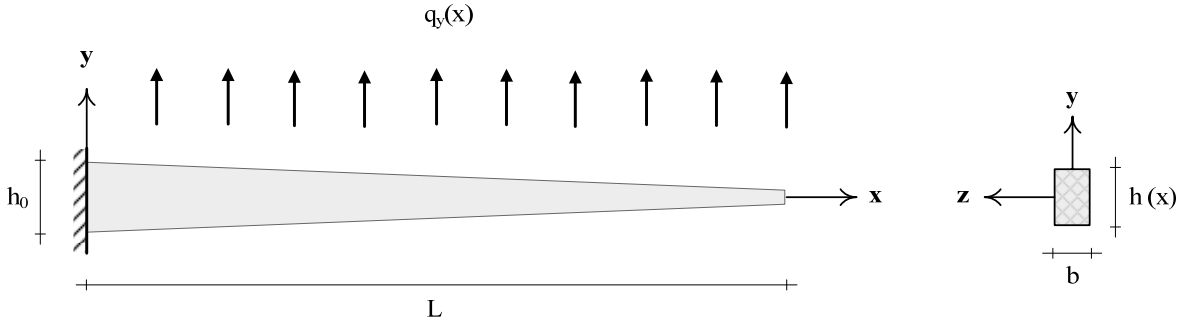
Genişliği sabit, yüksekliği doğrusal olarak değişen iki adet konsol kiriş ile değişken kesitli bir adet basit kirişin elastik eğrisi örnek olarak incelenmiştir. Konsol kirişin birincisi düzgün yayılı yüklerle yüklü iken ikincisi ucundan tekil yüklerle yüklenmiştir. Basit kiriş ise bir adet tekil yüklerle beraber düzgün yayılı yüklerle yüklenmiştir. Bu örnekler, geliştirilen bilgisayar programı kullanılarak sonlu farklar yöntemi ile analiz edilmiş olup her biri ayrı başlıklar altında aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır. Sonlu fark bölüm sayısı “ n ” değerine karar verilirken kullanılan bağıl yüzde hata değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır.

$$\text{bağıl yüzde hata} = \left| \frac{v_{i+1} - v_i}{v_{i+1}} \right| \times 100 \quad (7)$$

Ayrıca, her bir örnek için yüklü çubuklara ait elastik eğriler geliştirilen bilgisayar programı ile ve sonlu elemanlar yöntemi ile çalışan SAP 2000 v15 paket programı ile hesaplanmış ve karşılaştırmalı olarak grafikler şeklinde sunulmuştur.

3.1. Düzgün Yayılı Yüklerle Yüklenmiş Değişken Kesitli Konsol Kiriş

Bu problem için uç noktasındaki $v(x)$ değeri kesin çözüm ile kıyaslanmıştır[1]. Şekil 3’de gösterildiği gibi kiriş genişliği sabit $b = 500$ mm ve yüksekliği değişken $h(x) = h_0 - 2x/25$ şeklindedir. Burada $h_0 = 1000$ mm konsol kirişin ankastre mesnetli ucundaki kesit yüksekliğidir. Elastisite modülü $E = 210000$ MPa, üzerinde taşıdığı düzgün yayılı yük $q = 200$ N/mm ve uzunluğu $L = 10000$ mm’dir (Şekil 3).



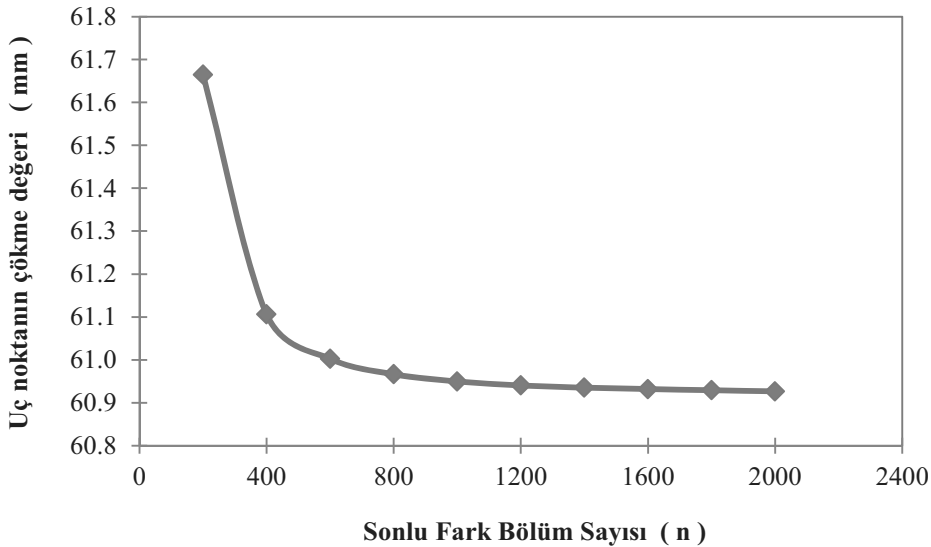
Şekil 3. Düzgün yayılı yüklerle yüklenmiş değişken kesitli konsol kiriş.

Kirişin sonlu fark bölüm sayısı “ n ” artırılarak hesaplanan uç noktasındaki $v(x)$ değerleri $v_{uç}$ Çizelge 2’de verilmiş ve bu değerler kullanılarak Şekil 4’teki grafik çizilmiştir.

Çizelge 2. Düzgün yayılı yükle yüklenmiş değişken kesitli konsol kirişte $v(x = L)$ çökme değerleri.

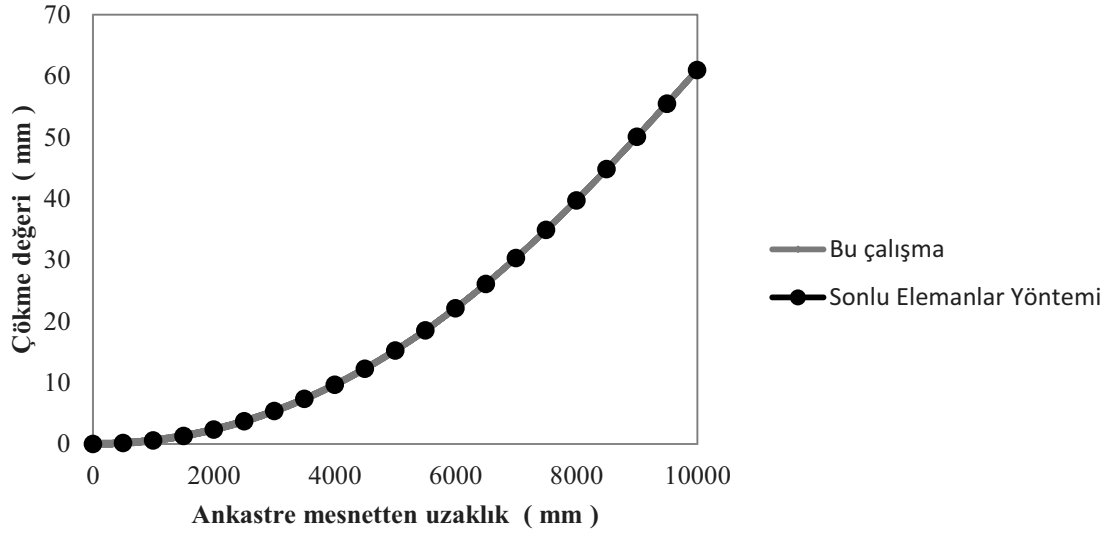
n	$v_{uç}$ [mm]	Bağlı hata [%]
200	61.6642	
400	61.1061	0.9133
600	61.0027	0.1695
800	60.9665	0.0594
1000	60.9497	0.0276
1200	60.9407	0.0148
1400	60.9354	0.0087
1600	60.9317	0.0061
1800	60.9294	0.0038
2000	60.9267	0.0044

Bu problemde $v(x)$ değerine karar verilirken bağlı hata yüzdesinin 0.01 olduğu nokta dikkate alınmıştır. Buna göre $n=1400$ için hesaplanan 60.9354mm değeri, düzgün yayılı yükle yüklenmiş değişken kesitli konsol kirişte uç noktanın doğruya en yakın $v(x)$ değeridir. Bu değer, 60.92mm olankesin çözüm [1] değerinden % 0.025 farklılık göstermektedir. Pratik olarak bu çökme değerleri aynı kabul edilmelidir.



Şekil 4. Düzgün yayılı yükle yüklenmiş değişken kesitli konsol kirişte $v(x = L)$ değerleri.

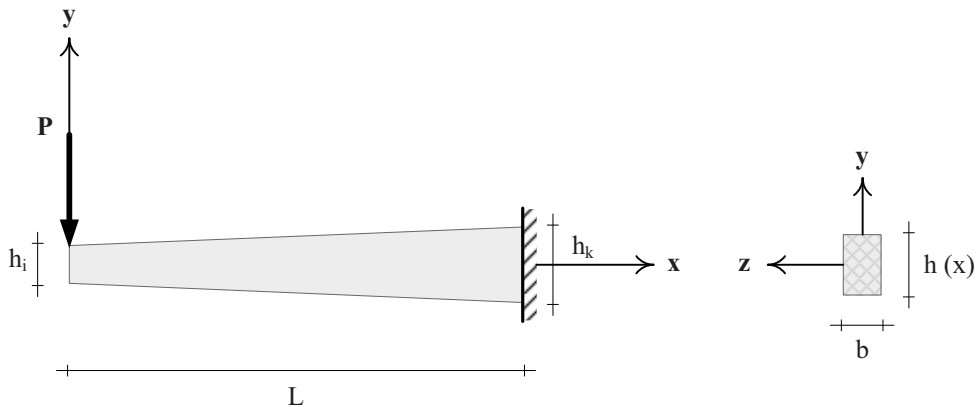
Elde edilen bu sonuca göre karar verilen $n=1400$ değeri için yükten dolayı konsol boyunca oluşan elastik eğri Şekil5'te görülmektedir.



Şekil 5. Düzgün yayılı yüklerle yüklenmiş değişken kesitli konsol kirişin elastik eğrisi.

3.2. Tekil Yükle Yüklenmiş Değişken Kesitli Konsol Kiriş

Bu problem için uç noktanın $v(x)$ değeri kesin çözüm ile kıyaslanmıştır[2]. Şekil 6 'da gösterilen değişken kesitli konsol kirişin genişliği (b) sabit 1 m ve yüksekliği $h(x) = (3/5) + 3x/20$ olarak seçilmiştir. Burada (3/5) metre konsol kirişin serbest ucundaki kesit yüksekliğidir. Elastisite modülü $E = 2 \times 10^7$ kN/m², serbest uca düşey doğrultuda etkiyente tekil yük $P = 100$ kN ve uzunluğu $L = 4$ molarak kabul edilmiştir (Şekil 6).



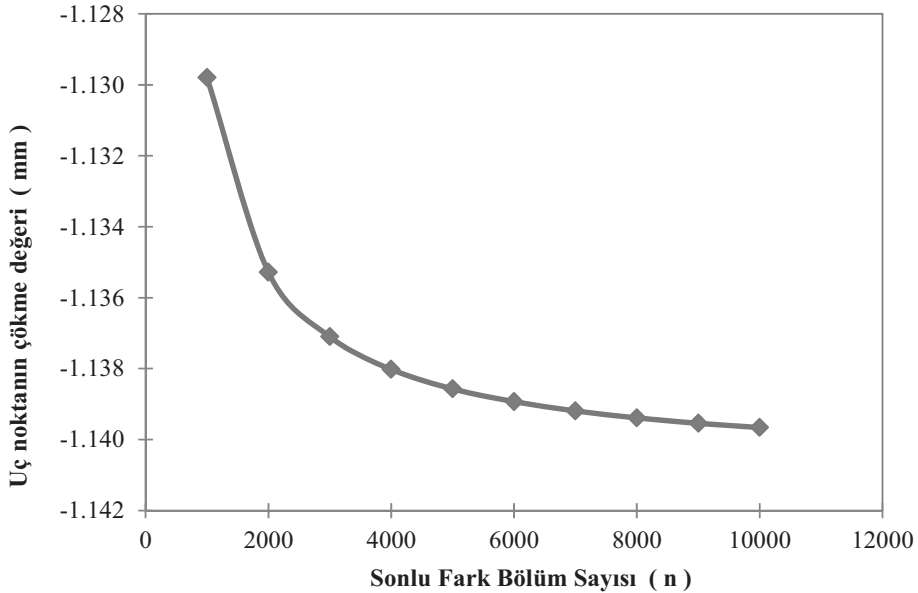
Şekil 6. Tekil yükle yüklenmiş değişken kesitli konsol kiriş.

Çözümde P tekil yükünün küçük bir alanda konsantre olarak etki ettiği düşünülmüştür. Kirişin sonlu fark bölüm sayısı“ n ” artırılarak hesaplanan uç noktasının $v(x)$ değerleri $v_{uç}$ Çizelge 3’te verilmiş ve bu değerler kullanılarak Şekil 7 ’deki grafik çizilmiştir.

Çizelge 3. Tekil yükte yüklenmiş değişken kesitli konsol kirişte $v(x = 0)$ değerleri.

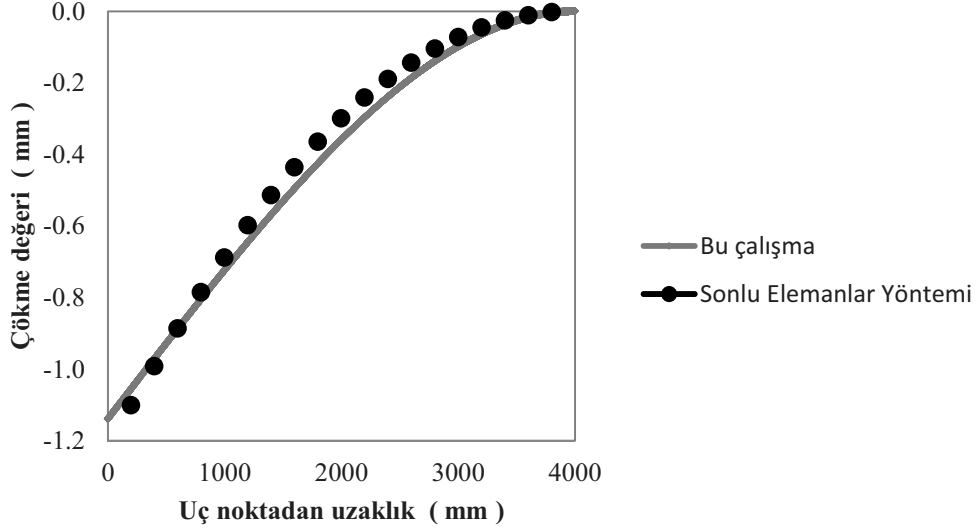
n	$v_{uç}$ [mm]	Bağlı hata [%]
1000	-1.1298	
2000	-1.1353	0.4827
3000	-1.1371	0.1601
4000	-1.1380	0.0808
5000	-1.1386	0.0483
6000	-1.1389	0.0316
7000	-1.1392	0.0228
8000	-1.1394	0.0176
9000	-1.1395	0.0132
10000	-1.1397	0.0105

Bu problemde $v(x)$ değerine karar verilirken bağlı hata yüzdesinin 0.01 olduğu nokta dikkate alınmıştır. Buna göre $n=8000$ için hesaplanan -1.1394 mm değeri, tekil yükte yüklenmiş değişken kesitli konsol kirişte uç noktasının doğruya en yakın $v(x)$ değeridir. Bu değer, -1.2115 mm olan kesin çözüm [2] değerinden % 5.951 farklılık göstermektedir.



Şekil 7. Tekil yükte yüklenmiş değişken kesitli konsol kirişte $v(x = 0)$ değerleri.

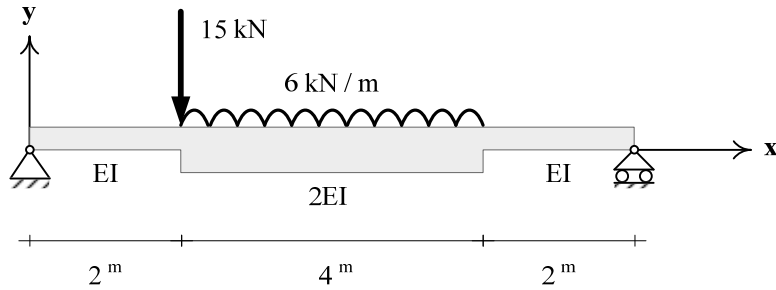
Elde edilen bu sonuca göre karar verilen $n=8000$ değeri için yükten dolayı konsol boyunca oluşan elastik eğri Şekil 8 'de görülmektedir.



Şekil 8. Tekil yükte yüklenmiş değişken kesitli konsol kirişin elastik eğrisi.

3.3. Değişken Kesitli Basit Kiriş

Bu problem için tekil yükün etki ettiği noktanın $v(x)$ değeri kesin çözüm ile kıyaslanmıştır [3]. Şekil 9'da gösterilen değişken kesitli basit kirişin toplam uzunluğu 8 m'dir. Kiriş üzerinde değişken kesitlere ait eğilme rijitlikleri ile yükleme durumu Şekil 9 'da verilmiştir.



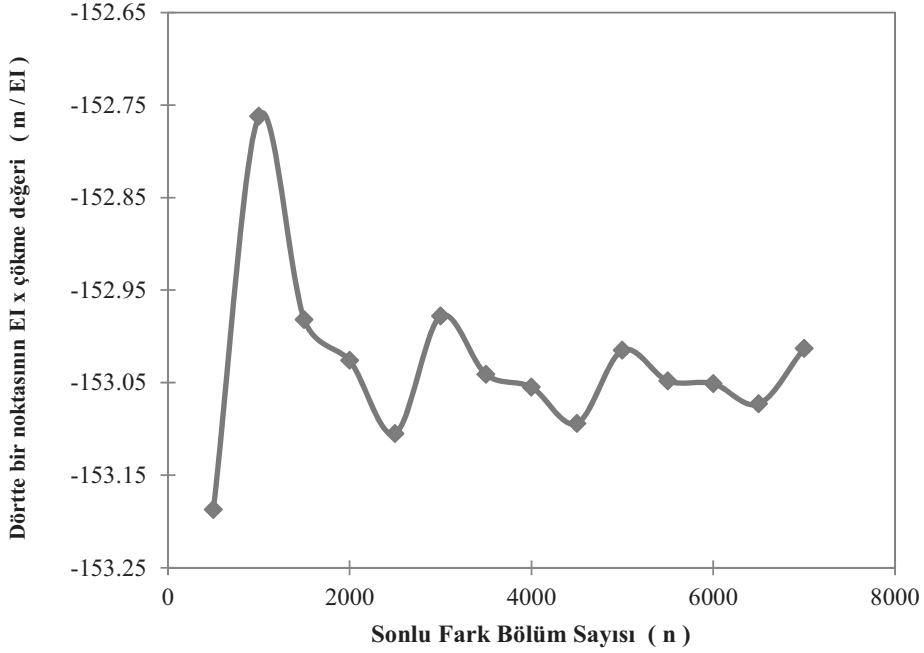
Şekil 9. Değişken kesitli basit kirişi.

Hesaplanan $v(x = 2m)$ değerinin kirişin sonlu fark bölüm sayısı“ n ”ile değişimi incelenmiştir. Bu değişim Çizelge 4’te verilmiş ve bu değerler kullanılarak Şekil 10’daki grafik çizilmiştir.

Çizelge 4. Değişken kesitli basit kirişin dörtte bir noktasındaki $v(x)$ değerleri.

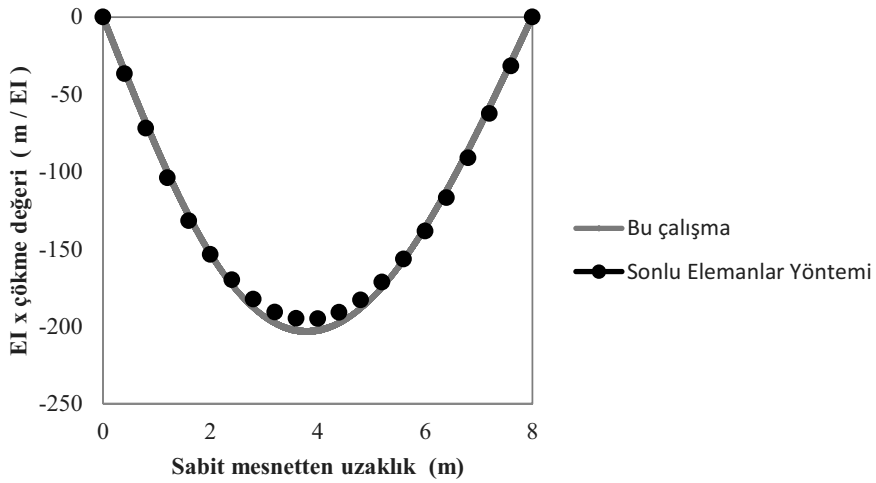
n	El * v_i [kNm³]	Bağlı hata [%]
500	-153.187	
1000	-152.762	0.2782
1500	-152.982	0.1438
2000	-153.026	0.0288
2500	-153.105	0.0516
3000	-152.978	0.0830
3500	-153.041	0.0412
4000	-153.055	0.0091
4500	-153.094	0.0255
5000	-153.015	0.0516
5500	-153.048	0.0216
6000	-153.051	0.0020
6500	-153.073	0.0144
7000	-153.013	0.0392

Bu problemde $v(x)$ değerine karar verilirken bağlı hata yüzdesinin 0.01 olduğu nokta dikkate alınmıştır. Buna göre $n=4000$ için hesaplanan $(-153.055 / EI)$ değeri, değişken kesitli basit kirişte uç noktanın doğruya en yakın çökme değeridir. Bu değer, $(-153.5 / EI)$ olan kesin çözüm [3] değerinden % 0.29 farklılık göstermektedir.



Şekil 10. Değişken kesitli basit kirişin dörtte bir noktasındaki EI v(x) değerleri.

Elde edilen bu sonuca göre karar verilen $n=4000$ değeri için yükten dolayı basit kiriş boyunca oluşan elastik eğri Şekil 11'de görülmektedir.



Şekil 11. Değişken kesitli basit kirişin elastik eğrisi.

4. SONUÇ

Bu çalışmada değişken kesitli kirişlerin sonlu farklar yöntemi ile elastik eğrisinin hesabı C++ dilinde geliştirilen bir bilgisayar programı yardımıyla üç farklı örnek için gerçekleştirilmiştir.

Elde edilen bulgular maddeler halinde aşağıda belirtilmiştir.

- Değişken kesitli kirişin çökme fonksiyonu $v(x)$, eğilme momenti fonksiyonu $M_z(x)$ ve eğilme rijitliği $EI_z(x)$ cinsinden ifade edilmiş ve elde edilen dördüncü dereceden diferansiyel denklemin çözümü için sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır.
- Belirli bir noktadaki $v(x)$ çökme değeri ile sonlu fark bölüm sayısı “ n ” arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çizilmiş ve bu grafiğe göre $v(x)$ çökme değerinin doğru sonuca en yakın olduğu değer elde edilmiştir. Bu değer tespit edilirken sonlu fark bölüm sayısı “ n ” ile hesaplanan $v(x)$ çökme değerleri arasındaki bağıl yüzde hata sınır değeri dikkate alınmıştır.
- Farklı sınır şartlarına sahip yüklü eğilme çubukları için sonlu eleman yöntemi ile elde edilmiş olan çökme değerleri, sonlu farklar yöntemi ile çalışan ve bu çalışmada kullanılan bilgisayar programına ait değerlerle karşılaştırıldığında, sonlu farklar yöntemi ile tatminkâr sonuçların elde edilebileceği görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] S. Li, J. Hu, C. Zhai, L. Xie, "Static, vibration, and transient dynamic analyses by beam element with adaptive displacement interpolation functions", *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, 1 (2012).
- [2] S. T. Wasti, "Prizmatik olmayan kiriş sonlu elemanları", *Yapı Mekaniği Semineri 2004*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, Eskişehir (2004).
- [3] W.M.C. McKenzie, "Examples in Structural Analysis", Taylor & Francis, NY, USA, 790 (2006).
- [4] T. Tankut, "Kirişsiz döşeme yapıların hesabı için yeni bir yöntem", *İMO*,41 (1970).
- [5] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, R. J. Witt, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley, New York, U.S.A., 784 (1989).
- [6] Y. Xu, and D. Zhou, "Elasticity solution of multi-span beams with variable thickness under static loads", *Applied Mathematical Modelling*, 33, 2951 (2009).
- [7] Y. Xu, and D. Zhou, "Two-dimensional analysis of simply supported piezoelectric beams with variable thickness ", *Applied Mathematical Modelling*, 35, 4458 (2011).
- [8] F. Romano, and G. Zingone, "Deflection of beams with varying rectangular cross section", *Journal of Engineering Mechanics*, 118(10), 2128 (1992).
- [9] Z. Girgin, E. Demir, C. Kol, "Genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodunun kirişlerin serbest titreşim analizine uygulanması", *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 10(3), 347 (2004).
- [10] A. K. Ashok, and S. B. Biggers, "Stiffness matrix for a non-prismatic beam-column element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(5), 1125 (1976).
- [11] H. Al-Gahtani, and M. Khan, "Exact Analysis of Nonprismatic Beams", *Journal of Engineering Mechanics*, 124(11), 1290 (1998).
- [12] T.J. Kotas, "A Numerical Solution for Non-Prismatic Beams with Arbitrary Transverse Loading and End Restraint Conditions", *The Structural Engineer*, 47(11), (1969).
- [13] R. Attarnejad, and A. Shahba, "Application of Differential Transform Method in Free Vibration Analysis of Rotating Non-Prismatic Beams", *World Applied Sciences Journal*, 5(4), 441 (2008).
- [14] M. Veiskarami, and S. Pourzeynali, "Green's function for the deflection of non-prismatic simply supported beams by an analytical approach", *Estonian Journal of Engineering*, 18(4), 336 (2012).
- [15] M. Brojan, T. Videnic, F. Kosel, "Large deflections of nonlinearly elastic non-prismatic cantilever beams made from materials obeying the generalized Ludwick constitutive law", *Meccanica*, 44(6), 733 (2009).

- [16] M. Brojan, M. Cebron, F. Kosel, “Large deflections of non-prismatic nonlinearly elastic cantilever beams subjected to non-uniform continuous load and a concentrated load at the free end”, *Acta Mechanica Sinica*, 28(3), 863 (2012).
- [17] S.A. Hamoush, M.J. Terro, W.M. Mcginley, “Elastic and inelastic analysis of non-prismatic members using finite difference”, *Kuwait Journal of Science*, 29(2), 165 (2002).
- [18] M. İnan, "Cisimlerin Mukavemeti", İTÜ, İstanbul, Türkiye, 560 (1988).