Çankaya University Journal of Science and Engineering
Volume 10 (2013), No. 1, 91–100

Hasar Toleransında Parametrik Analiz-Devir Sayma Tekniğinin Etkisi

Turgut Akyürek

Çankaya Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 06810, Yenimahalle, Ankara, Türkiye
turgutakyurek@cankaya.edu.tr

Özet. Bu makalede hasar toleransında etken olan önemli parametrelerin hasar tolerans ömürleri üzerine etkileri çalışması kapsamında yük devirlerini sayma yönteminin yorulma çatlağı büyümesi tahminlerine etkileri analiz edilerek, sistemlerin hasar toleransına dayalı tasarımlarında en uygun çözümü ararken göz önünde bulundurulması gerekli devir sayma teknikleri irdelenmektedir.

Anahtar Kelimeler. Hasar toleransı, yorulma çatlağı büyümesi, ömür, devir sayma tekniği.

Abstract. In this paper, within the context of a study on the effects of the parameters which are important for damage tolerance, upon damage tolerance life, cycle counting techniques are assessed while looking for an optimum solution to design of systems on the basis of damage tolerance, through analysing the effects of load cycle counting technique on fatigue crack growth life estimations.

Keywords. Damage tolerance, fatigue crack growth, life, cycle counting technique.

1. Giriş

Bu makalede hasar toleransı ömür analizinde etken olan parametrelerden yük devri sayma teknikleri yorulma çatlağı büyümesi tahminlerine göre irdelenmekte ve optimum çözümün bulunmasına katkı sağlayacak sayma tekniği önerisi getirilmektedir.

Received August 7, 2012; accepted April 11, 2013.

Bu makale, 26-27 Nisan 2012 tarihlerinde Çankaya Üniversitesi'nin Ankara Merkez yerleşkesinde yapılmış olan *5. Çankaya Üniversitesi Mühendislik ve Teknoloji Sempozyumu*'nda sunulan ve sadece geniş bildiri özeti bölümü hakem sürecinden geçerek bu sempozyum kitapçığında yayımlanan bir makalenin revize edilmiş şekli olup Sempozyum Değerlendirme Komitesi tarafından yayımlanmak üzere *Çankaya University Journal of Science and Engineering* dergisine gönderilmesi önerilmiş ve derginin bağımsız hakem değerlendirmeleri sonucunda yayıma kabul edilmiştir.

ISSN 1309 - 6788

2. Metodoloji

2.1. Hasar toleransı. Sistemlerin yorulmaya karşı tasarımlarında iki temel yaklaşım kullanılmaktadır; güvenli ömür ve hasar toleransı.

Güvenli ömür yaklaşımında, yorulma yönünden kritik olan parçalar belirli bir kullanım ömrüne göre tasarımlanmakta ve bu ömür tamamlandığında veya öncesinde kullanımdan kaldırılarak yorulmaya dayalı kırım olasılığının azaltılması amaçlanmaktadır. Bu yaklaşım, yorulma dayanımı ve uygulanan yorulma yüklerinin rasgele kombinasyonlarından kaynaklanan, istatistiksel olarak tahmin edilebilir yorulma kırımlarına uygulanmaktadır. Güvenli ömür yaklaşımı, parçada mevcut kusurların etkilerini yeterli ölçüde değerlendirememektedir. Yıllarca gözlemlenen kullanım verileri; güvenli ömür yaklaşımının imalat kusurları, bakım hataları ve kullanımla oluşan hasar gibi öngörülmemiş etkenlerin yolaçtığı yorulma kırımları nedeniyle yetersiz olduğunu göstermiştir [1].

Bu yetersizlik nedeniyle güvenli ömür yaklaşımı 1960'lı yıllarda yerini, malzemede mevcut veya sonradan oluşmuş kusurların boyutlarının, malzeme kalan dayanımının güvenli seviyenin altına düşmesi durumunda görülecek hasar seviyesine ulaşmadan önce parça muayenesinde tespit edilmesine dayalı kırım güvenli tasarım yaklaşımına terketmiştir [2].

Bu yaklaşımın kapsamı 1970'li yıllarda genişletilerek, sistemin hasarı belirlenmiş bir zaman aralığında yapısal güvenliği olumsuz etkilemeden muhafaza edebilme yeteneğine dayalı hasar toleransı tasarım yaklaşımına dönüştürülmüş ve kırım güvenli tasarım, hasar toleransı yaklaşımın bir alt dalı olarak değerlendirilmeye başlanılmıştır. Hasar toleransı yaklaşımı; kritik yapısal parçalarda tasarım, imalat ve muayene yöntemlerinin tüm önleme çabalarına rağmen tespit edilmeyen kusur veya hasarların mevcudiyetinde bile yapısal güvenliği güvence altına alma amaçlı olarak kullanılmaktadır.

Hasar toleransı tasarımında iki yapı biçimi esas alınmaktadır; parçada mevcut kusur büyüklüğünün dengesiz hızlı çatlak büyümesini başlatacak kritik çatlak büyüklüğüne ulaşmadan sistem muayenesinde tespitini öngören yavaş çatlak büyümeli yapı ve bir ana yük yolu veya elemanı kırımı sonrası yapının belirli bir süre güvenli kullanımını esas alan kırım güvenli yapı [3].

Hasar toleransında çatlak başlangıç uzunluğu varsayımında; delikler için, kalınlığı $\leq$0,05 inç olan yapılarda, deliğin bir tarafında 0,05 inç uzunluğunda kalınlık boyu çatlağı, kalınlığı $>$0,05 inç olan yapılarda ise 0,05 inç yarıçaplı köşe çatlağı, yapının diğer yerleri için ise, kalınlığı $\leq$0,125 inç olan yapılarda, deliğin bir tarafında 0,25 inç uzunluğunda kalınlık boyu çatlağı, kalınlığı >0,05 inç olan yapılarda ise uzunluğu (2c) 0,25 inç, derinliği (a) 0,125 inç olan yarı eliptik yüzey çatlağı esas alınmaktadır [4].

2.2. Çatlak büyümesinde etken temel parametreler. Doğrusal Elastik Kırılma Mekaniği kullanılarak yük deviri başına yorulma çatlağı büyümesi (da/dN) tahmini hesaplamaları, çatlak büyümesinde etken temel parametreleri esas almakta olup, söz konusu temel parametreler literatürde uzun yıllardır üzerinde çalışılan konular arasındadır.

Devir başına çatlak büyümesinde etkili temel parametreler; gerilme yığılması aralığı, tepe değeri ve eşik değeri, gerilme oranı, kırılma tokluğu, yük geçmişindeki sıralama, yük devri sayma tekniği, numune kalınlığı, sıcaklık, çevre koşulları ve frekans olarak özetlenebilir.

Değişken genlikli yüklemenin rasgele özelliği nedeniyle tüm bu parametreleri doğru olarak modellemek oldukça güçtür. Aşırı yüklerin çatlak büyümesini yavaşlattığı, düşük yüklerin ise artırdığı bilinmektedir. Yük etkileşiminin yük geçmişindeki sıraya büyük ölçüde bağımlı olması, değişken genlikli yüklemeyi sabit genlikliye göre oldukça karmaşık hale getirmektedir [5].

2.3. Yük devri sayma tekniğinin hasar tolerans ömrüne etkisinin analizi. Devir tanımı devir sayma yöntemine göre değişmektedir. Literatürde kullanılan ana devir sayma teknikleri; seviye geçişi sayımı, tepe sayımı, basit aralık sayımı ve aralık çifti-aralık (veya yağmur-akışı) sayımını içermektedir. Devir sayımları kuvvet, gerilme, gerinim, tork, ivme, sehim, veya ilgi konusu diğer yük parametrelerinin zaman kayıtları için yapılabilmektedir [6].

2.3.1. Seviye geçişi sayımı. Yükün pozitif eğimli kısmının referans yükün üzerindeki önayarlı seviyeyi, negatif eğimli kısmının ise referans yükün altındaki önayarlı seviyeyi her geçişinde bir sayım kaydedilmektedir.

Uygulamada, seviye geçişi sayımlarında büyük sayım artışına yol açabilecek küçük genlik değişimlerini ayıklamak için kısıtlamalar sıklıkla tanımlanmaktadır. Bu durum devir sayımı öncesi küçük yük değişimlerinin filtrelenmesiyle gerçekleştirilebilmektedir.

Yorulma analizinde en çok hasarı yapacak devir sayımı, tüm seviye geçişleri sayılıncaya kadar, önce olası en büyük devir, sonra ikinci en büyük ve sırasıyla diğerleri oluşturularak elde edilmektedir.

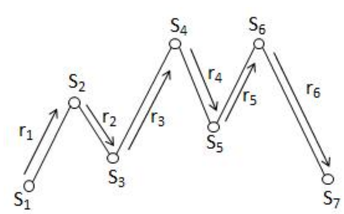
2.3.2. Tepe sayımı. Tepe sayımı göreli en büyük ve en küçük yük değeri oluşumunu tanımlamaktadır. Referans yük seviyesinin üzerindeki tepeler ve referans yük seviyesinin altındaki vadiler sayılmaktadır. Tepe ve vadi sayımları genellikle ayrı olarak kaydedilmektedir. Küçük genlikli yükleri ayıklamak için ortalamayı geçen tepe sayımı sıklıkla kullanılmaktadır. Tüm tepeleri ve vadileri saymak yerine, sadece birbirini takip eden iki ortalama geçişleri arasındaki en büyük tepe veya vadi sayılmaktadır.

Yorulma analizinde en çok hasarı yapacak devir sayımı, tüm seviye geçişleri sayılıncaya kadar, en büyük tepe ve en küçük vadi kullanılarak, önce olası en büyük devir, sonra ikinci en büyük ve sırasıyla diğerleri oluşturularak elde edilmektedir.

2.3.3. Basit aralık sayımı (BAS). Bu yöntemde aralık, birbirini takip eden dönüşler arasındaki fark olarak tanımlanmaktadır ve bir vadi bir tepe tarafından takip edildiğinde pozitif, bir tepe bir vadi tarafından takip edildiğinde ise negatiftir. Sadece pozitif veya negatif aralıklar sayıldığında, herbiri bir devir olarak sayılmaktadır. Pozitif ve negatif aralıklar birlikte sayılırsa, herbiri yarım devir olarak sayılmaktadır. Seçili bir değerden küçük aralıklar genellikle sayım öncesi ayıklanmaktadır.

Genellikle aralık sayımı olarak gösterilen tek değişimlere dayalı BAS tekniği, Şekil 1'de açıklanmaktadır. Bu yük geçmişinde aşağıdaki aralıklar ardışık olarak sayılmaktadır:

Bir yukarı aralık $r_1 = S_2 - S_1$
Bir aşağı aralık $r_2 = S_3 - S_2$
Bir yukarı aralık $r_3 = S_4 - S_3$, vb.

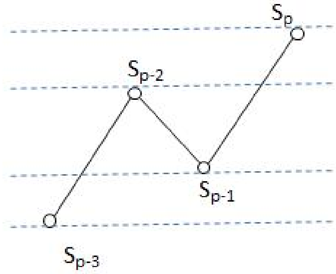


Şekil 1. Basit aralık sayma (BAS) tekniği.

Her bir aralığın ortalama değeri de sayıldığında, yöntem basit aralık-ortalama sayımı olarak adlandırılmaktadır. Bir basit aralık-ortalama sayımının sonucu bir aralık-ortalama matrisi biçiminde düzenlenmektedir.

2.3.4. Aralık çifti-aralık (veya yağmur akışı) sayımı (YAS). Yağmur akışı yöntemine benzer devir sayma yöntemlerini tanımlamak üzere literatürde farklı terimler kullanılmaktadır. Bunlar; aralık çifti sayımını, Hayes yöntemini, aralık-çift aralığı sayımını, koşuyolu sayımını ve orijinal yağmur akışını içermektedir. Yük geçmişi, en büyük tepe veya en küçük vadi ile başlar ve biterse, bu yöntemlerin hepsi aynı, diğer durumlarda ise benzer fakat genellikle farklı sayımlara yol açmaktadır.

Aralık çifti-aralık yöntemi Jonge [7] tarafından, yağmur akışı yöntemi olarak adlandırılan benzeri bir teknik ise aynı tarihlerde Japonya'da Watson [8] tarafından geliştirilmiştir. İki yöntem de yük geçmişinden, özdeş yük aralık çiftleri ve tek aralıklar saymaktadır. Yöntem tüm yük-zaman geçmişinin ardışık tepe-vadi dizinine dönüştürülmesiyle başlamakta, bu dönüştürmede belirli bir aralık filtre ölçüsü kullanılarak küçük değişimler ayıklanmaktadır. Şekil 2'de gösterildiği üzere aralık çifti-aralık sayımı, kayıtlı ilk tepe-vadiden başlanılarak; ardışık S_{p-3}, S_{p-2}, S_{p-1} ve S_p dörtlü grubu değerlendirilmektedir. Bu grupta, S_{p-3} ve S_p arasındaki S_{p-2} ve S_{p-1}, S_{p-3} ve S_p üst-alt sınır değerleri arasında kalıyor ise bir aralık çifti olarak sayılmakta ve kayıtlardan silinmekte, işlem geriye dönülerek S_{p-5}, S_{p-4}, S_{p-3} ve S_p dörtlüsü için tekrar edilmektedir. Sayma kriteri karşılanmıyor ise, bir adım ilerlenerek S_{p-2}, S_{p-1}, S_p ve S_{p+1} dörtlüsü değerlendirmeye alınmaktadır. Tüm yük geçmişi değerlendirildikten sonra kalan artık yükler ardışık tek aralıklar olarak sayılmaktadır.



Şekil 2. Aralık çifti-aralık sayımı tekniği.

3. Bulgular

Değişken genlikli yüklerin yorulma hasarı, esas olarak genliğe, ulaşılan yük mutlak değerinden çok yük değişimine bağlıdır. Bu bağlamda, yorulma hasarı açısından yük-zaman geçmişini değerlendirmede, yük geçmişindeki yük değişimlerini veya aralıklarını gözlemlemek akılcı görülmektedir. Bu nedenle bu çalışmada yük değişimi veya aralığını esas alan iki ana teknik kullanılmıştır; en yaygın kulanılan yağmur akışı ve gerçek yük geçmişi verisini temsil eden basit aralık sayımı.

Devir sayma tekniğinin hasar tolerans ömrü tahminleri üzerindeki etkisini belirlemek üzere literatürde mevcut deney verileri [9] kullanılarak bir seri ömür tahmin çalışması yapılmıştır.

Merkez çatlaklı çekme numunelerine ilişkin sabit genlikli yorulma çatlağı ilerlemesi deney verileri kullanılarak, avcı uçağına ait farklı görev tipi rasgele sıralı yük geçmişleri altındaki yorulma çatlağı büyüme ömürlerinin tahmini çalışması, iki farklı hasar toleransı ömür tahmini modellemesi ile yük etkileşimsiz ve yük etkileşimli olarak yapılmıştır. Her bir hesaplama, devir sayma yönteminin tahmin edilen ömür üzerindeki etkilerini görmek üzere, YAS modeli ve BAS modeli kullanılarak yapılmıştır.

Tablo şeklinde verilen rasgele yük geçmişleri, bir avcı uçağının Hava-Hava (A-A), Hava-Yer (A-G), Cihazlama ve Seyrüsefer (I-N) ve Karışık (C) görevlerini içermektedir. Yük tablolarındaki sayısal değerler tasarım sınır gerilmesi (DLS) yüzdesi şeklinde olup, üç DLS seviyesi için verileri içermektedir; 20 ksi, 30 ksi ve 40 ksi.

Bu çalışmada her bir görev tipine ilişkin yük geçmişi verileri YAS ve BAS devir sayma teknikleri kullanılarak sayılmış ve ömür tahmin hesaplamalarında yük geçmişi verisi olarak kullanılmıştır.

Hesaplamalarda; devir başı çatlak ilerleme hızı hesabında yeniden düzenlenmiş Forman denklemi (1) ve değiştirilmiş Walker denklemi (2-3), yük etkileşiminde Çok Parametreli Akma Bölgesi Modeli (ÇPABM) [10] ve Willenborg-Chang Modeli (WCM) [11] kullanılarak, FATIGUE [12] yazılımı ile yapılmıştır.

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\Delta K^n}{(1-R^{\mathrm{eff}})^m K_{\mathrm{IC}} - \Delta K} \tag{1}$$

Burada C ve n malzeme sabitleri, ΔK gerilme yığılması aralığı, R^{eff} etkin gerilme oranı ve K_{IC} düzlem gerinim kırılma tokluğudur. $R^{\mathrm{eff}} \geq 0$ iken $m = 1$, $R^{\mathrm{eff}} < 0$

olduğunda $m = 2$'dir.

$$\begin{aligned}\frac{da}{dN} &= C[(1-\overline{R^{\text{eff}}})^{m-1}\Delta K_{\text{eff}}]^n \\ 0 &\leq \overline{R^{\text{eff}}} < R^+_{\text{cut}},\ \overline{R^{\text{eff}}} = R^{\text{eff}} \\ 0 &\leq \overline{R^{\text{eff}}} > R^+_{\text{cut}},\ \overline{R^{\text{eff}}} = R^+_{\text{cut}}\end{aligned} \tag{2}$$

Denklemde C ve n malzeme sabitleri, ΔK_{eff} etkin gerilme yığılması aralığı, $\overline{R^{\text{eff}}}$ etkin gerilme oranı, m Walker gerilme oranı tabaka çökme katsayısı, R^+_{cut} ise $da/dN - \Delta K$ grafiğinde daha fazla gerilme oranı tabakalanmasının görülmediği kesme değeridir. Etkin gerilme oranı negatif olduğunda (2) yerine (3) kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned}\frac{da}{dN} &= C[(1+\{R^{\text{eff}}\}^2)^q K^{\text{eff}}_{\text{max}}]^n \\ \overline{R^{\text{eff}}} &< 0\end{aligned} \tag{3}$$

Burada q negatif gerilme oranı indisi, $K^{\text{eff}}_{\text{max}}$ ise etkin gerilme yığılması tepe değeridir. Hesaplamalarda kullanılan malzeme özellikleri verisi Tablo 1'de verilmektedir.

Tablo 1. Tahminde kullanılan malzeme özellikleri verisi.

Malzeme	**Çatlak Büyümesi Sabitleri**		**Yük Etkileşim Parametreleri**	
	Forman (SI metrik)	**Walker (İnç sistemi)**	**ÇPABM**	**WCM**
2219-T851	$C = 4,626E-9$ $n = 3,171$ $K_c = 88$ $\triangle K^0_{\text{TH}} = 3,3$ $S_Y = 345$	$C = 8,367E-10$ $n = 3,64$ $m = 0,60$ $K_c = 65$ $\triangle K^0_{\text{TH}} = 2,5$ $S_Y = 48$	$A = 1,0$ $R_{\text{so}} = 2,3$ $Y = 0,0$ $Z = 0,5$ $R^+_{\text{cut}} = 0,99$ $R^-_{cut} = -0,99$	$R_{\text{so}} = 2,3$ $q = 0,3; 0,6; 1,0$ $R^+_{\text{cut}} = 0,99$ $R^-_{\text{cut}} = -0,99$

Analitik tahmin sonuçları ÇPABM için Tablo 2'de, WCM için Tablo 3'de verilmektedir.

Tablo 2 deki hesaplama sonuçlarının deney sonuçlarına oranı ($N_{\text{tah}}/N_{\text{test}}$) verilerine göre, yük etkileşimli hesaplamalar etkileşimsiz hesaplamalara göre doğal olarak daha iyi sonuçlar vermektedir. Devir sayma yöntemi açısından sonuçlar incelendiğinde; sayma yönteminin yük etkileşimli hesaplamalarda ortalama ($N_{\text{tah}}/N_{\text{test}}$) üzerinde kayda değer farklılık göstermediği (YAS için 1,06; BAS için 1,03), ancak standart sapmalarda farklılık yarattığı (YAS için 0,11; BAS için 0,16), yük etkileşimsiz hesaplamalarda ise ortalama ($N_{\text{tah}}/N_{\text{test}}$) ve standart sapma üzerinde kayda değer farklılık oluşturduğu (ortalama değer YAS için 0,70; BAS için 0,82; standart sapma

YAS için 0,12; BAS için 0,17) görülmektedir. ÇPABM sonuçlarına göre yük etkileşimli hesaplamalarda YAS, yük etkileşimsiz hesaplamalarda ise BAS yöntemi kullanılmasının daha uygun olacağı değerlendirilmektedir.

TABLO 2. Çatlak büyüme ömrü tahminleri (ÇPABM).

Görev Tipi	**Test No.** (DLS,ksi)	**Analitik Tahminler, devir;** ($N_{\text{tah}}/N_{\text{test}}$)			
		Yük Etkileşimsiz		**Yük Etkileşimli**	
		YAS	**BAS**	**YAS**	**BAS**
Hava-Hava (A-A)	M-81 (20)	106555 (0,92)	130703 (1,13)	138137 (1,19)	140798 (1,22)
	M-82 (30)	37935 (0,65)	46925 (0,80)	52235 (0,89)	51840 (0,88)
	M-83 (40)	13044 (0,72)	16053 (0,88)	18427 (1,01)	18105 (1,00)
Hava-Yer (A-G)	M-84 (20)	224259 (0,83)	266553 (0,99)	308833 (1,15)	299803 (1,11)
	M-85 (30)	71803 (0,75)	60231 (0,63)	88731 (0,93)	82983 (0,87)
	M-86 (40)	20553 (0,57)	24519 (0,67)	31360 (0,86)	28562 (0,79)
Aletlendirme-Seyrüsefer (I-N)	M-88 (30)	219001 (0,58)	254700 (0,67)	443101 (1,16)	495301 (1,30)
	M-89 (40)	80401 (0,49)	93601 (0,57)	178201 (1,08)	197101 (1,20)
Karma (C)	M-90 (20)	179968 (0,82)	215840 (0,99)	261266 (1,20)	241704 (1,11)
	M-91 (30)	44417 (0,68)	53433 (0,81)	68811 (1,05)	61431 (0,94)
	M-92 (40)	15388 (0,69)	18555 (0,84)	24501 (1,10)	21341 (0,96)
Ortalama ($N_{\text{tah}}/N_{\text{test}}$)		0,70	0,82	1,06	1,03
Standart Sapma		0,12	0,17	0,11	0,16

Tablo 3 deki hesaplama sonuçlarının deney sonuçlarına oranı ($N_{\text{tah}}/N_{\text{test}}$) ve standart sapma verilerine göre, yük etkileşimli hesaplamalarda değerler q indisi ile değişmekle birlikte, YAS, BAS'a göre çok daha iyi değerler sağlamaktadır.

Yük etkileşimsiz hesaplamalarda ise ortalama ($N_{\text{tah}}/N_{\text{test}}$) açısından BAS, YAS'a göre daha iyi sonuçlar vermektedir (YAS için 0,80; BAS için 0,98). Standart sapma değerleri göz önüne alındığında ise YAS'ın, BAS'a göre daha iyi sonuç sağladığı (YAS için 0,18; BAS için 0,22) görülmektedir.

TABLO 3. Çatlak büyüme ömrü tahminleri (WCM).

Test No.	Analitik tahminler, devir; ($N_{\mathbf{tah}}/N_{\mathbf{test}}$)							
	Yük etkileşimsiz		**Yük etkileşimli**					
			$q = 0,3$		$q = 0,6$		$q = 1,0$	
	YAS	**BAS**	**YAS**	**BAS**	**YAS**	**BAS**	**YAS**	**BAS**
M-81	133043 (1,15)	165690 (1,43)	191765 (1,66)	291540 (2,52)	186796 (1,61)	276350 (2,39)	179514 (1,55)	248729 (2,15)
M-82	42944 (0,73)	53345 (0,91)	60035 (1,03)	96441 (1,65)	58735 (1,00)	91045 (1,55	56135 (0,96)	80645 (1,38)
M-83	14344 (0,79)	18020 (0,99)	19735 (1,09)	31441 (1,73)	19544 (1,08)	29945 (1,65)	18435 (1,02)	26453 (1,46)
M-84	282863 (1,05)	339150 (1,26)	- -	- -	- -	- -	373168 (1,39)	475000 (1,77)
M-85	70118 (0,73)	83985 (0,88)	106459 (1,11)	155235 (1,62)	101468 (1,06)	145412 (1,52)	93481 (0,98)	128312 (1,34)
M-86	22231 (0,61)	26678 (0,73)	34259 (0,94)	50169 (1,38)	32375 (0,89)	46935 (1,29)	29831 (0,82)	41235 (1,13)
M-88	271501 (0,71)	319201 (0,84)	- -	- -	552001 (1,45)	701101 (1,84)	360901 (0,95)	520201 (1,37)
M-89	93001 (0,56)	109501 (0,66)	- -	- -	198901 (1,21)	257401 (1,56)	125401 (0,76)	189301 (1,15)
M-90	221113 (1,01)	267598 (1,23)	- -	- -	- -	- -	295636 (1,36)	416966 (1,91)
M-91	50266 (0,77)	60818 (0,93)	- -	- -	73031 (1,11)	112513 (1,71)	67756 (1,03)	95633 (1,46)
M-92	16506 (0,74)	20286 (0,91)	24946 (1,12)	40331 (1,82)	23891 (1,08)	37545 (1,69)	22391 (1,01)	31892 (1,44)
Ortalama ($N_{\mathrm{tah}}/N_{\mathrm{test}}$)	0,80	0,98	1,16	1,79	1,17	1,69	1,08	1,51
Standart Sapma	0,18	0,22	0,23	0,35	0,21	0,29	0,24	0,30

WCM sonuçlarına göre yük etkileşimli hesaplamalarda YAS tekniği, yük etkileşimsiz hesaplamalarda ise BAS yöntemi kullanılmasının daha uygun olacağı değerlendirilmektedir.

4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışma kapsamında hasar toleransı ömür analizinde etken olan parametrelerden yük devri sayma teknikleri irdelenmiş ve yük etkileşimli tahminlerde YAS tekniğinin, yük etkileşimsiz tahiminlerde ise BAS yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Yük sayımı yapılırken başlangıçta kullanılan yük aralığı filtre ölçüsünün ömür tahminleri üzerine etkisi bu çalışma kapsamında incelenilmemiş olup, farklı filtre ölçülerinin ömür tahmini üzerine etkilerinin incelenmesinde yarar görülmektedir.

Kaynaklar

[1] N. Iyyer, S. Sarkar, R. Merrill and N. Phan, Aircraft life management using crack initiation and crack growth models - P-3C Aircraft experience, *International Journal of Fatigue* **29** (2007), 1584–1607.

[2] U. Zerbst, K. Mädler, H. Hintze, Fracture mechanics in railway applications—an overview, *Engineering Fracture Mechanics* **72** (2005), 163–194.

[3] JSSG-2006, Department of Defense Joint Service Specification Guide: Aircraft Structures (1998), 40–42.

[4] JSSG-2006, Department of Defense Joint Service Specification Guide: Aircraft Structures (1998), 383–404.

[5] X. Huang, M. Torgeir and W. Cui, An engineering model of fatigue crack growth under variable amplitude loading, *International Journal of Fatigue* **30** (2008), 2–10.

[6] ASTME 1049-85 (Reapproved 1997). Standard practices for cycle counting in fatigue analysis. In: *Annual Book of ASTM Standards, Vol. 03.01*, Philadelphia (1999) 710–718.

[7] J. B. Jonge, The monitoring of fatigue loads, *NLR-MP-70010U, National Aerospace Lab, NLR* (1970), 7–8.

[8] P. Watson and B. J. Dabell, Cycle counting and fatigue damage, *Journal of the Society of Environmental Engineers* **15.3** (1970), 3–8.

[9] J. B. Chang, Round-robin crack growth predictions on center cracked tension specimens under random spectrum loading, *ASTM STP 748, American Society for Testing and Materials, Special Technical Publication* (1981), 3–40.

[10] W. S. Jonhson, Multi-parameter yield zone model for predicting spectrum crack growth, *ASTM STP 748, American Society for Testing and Materials, Special Technical Publication* (1981), 85–102.

[11] J. B. Chang, M. Szamossi and K. W. Liu, Random spectrum fatigue crack life predictions with and without considering load interactions, *ASTM STP 748, American Society for Testing and Materials, Special Technical Publication* (1981), 115–132.

[12] T. Akyürek, *Damage Tolerance Life Estimation of a Fighter Aircraft*, PhD Thesis, Middle East Technical University, Ankara 1991.

Çankaya University Journal of Science and Engineering
Volume 10 (2013), No. 1, 101–113

Topological Functors via Closure Operators

Mina Jamshidi[1] and Seyed Naser Hosseini[1,*]

[1] *Department of Mathematics, Shahid Bahonar University of Kerman, 76169-14111, Kerman, Iran*
[*] *Corresponding author: nhoseini@uk.ac.ir*

Özet. Bu makalede, verilen bir $\mathcal{X}$ kategorisi için, verilen bir $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}_1$ derlemesi üzerindeki kapanış operatörlerinin belli kategorilerini, $\mathcal{X}$ üzerindeki önsınıf-değerli esnek öndemetlerin belli kategorilerinin içine tam gömüyoruz. Daha sonra, $\mathcal{X}$ üzerindeki önsınıf-değerli esnek öndemetlerin biraz önce bahsi geçen kategorilerini, $\mathcal{X}$ üzerindeki topolojik izleçlerin belli kategorilerinin içine tam gömüyoruz. Elde edilen dolu gömmeleri birleştirerek, verilen bir kapanış operatöründen bir topolojik izleç inşa ediyoruz.[†]

Anahtar Kelimeler. Kapanış operatörü, esnek öndemet, esnek doğal dönüşüm, (tam) önsıralı ya da kısmi sıralı sınıf, (zayıf) topolojik izleç.

Abstract. In this article for a given category $\mathcal{X}$, we fully embed certain categories of closure operators on a given collection $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}_1$, in certain categories of preclass-valued lax presheaves on $\mathcal{X}$. We then fully embed the just mentioned categories of preclass-valued lax presheaves on $\mathcal{X}$, in certain categories of topological functors on $\mathcal{X}$. Combining the full embeddings obtained, we construct a topological functor from a given closure operator.

Keywords. Closure operator, lax presheaf, lax natural transformation, (complete) preordered or partially ordered class, (weak) topological functor.

1. Introduction

The categorical notion of closure operators has unified several notions in different areas of mathematics, [12]. It is studied in connection with many other notions as well as the notion of topological functors. Closure operators and/or topological functors have been investigated in [1] to show full functors and topological functors form a weak factorization system in the category of small categories, in [3], to characterize the notions of compactness, perfectness, separation, minimality and absolute closedness with respect to certain closure operators in certain topological categories, in [4] to show that the category of MerTop is topological over Top and to

Received November 7, 2012; accepted May 3, 2013.

[†]Türkçe özet ve anahtar kelimeler, orijinal İngilizce metindeki ilgili kısmın doğrudan tercümesi olup *Çankaya University Journal of Science and Engineering* editörlüğü tarafından yazılmıştır. | Turkish abstract and the keywords are written by the editorial staff of *Çankaya University Journal of Science and Engineering* which are the direct translations of the related original English text.

ISSN 1309 - 6788

study certain related closure operators, in [5] to verify that there is a bicoreflective general process available for carrying out certain constructions and that the bicoreflector can be adapted to respect a closure operator when the topological construct is endowed with such, in [6] to prove certain categories are topological, in [8] to define connectedness with respect to a closure operator in a category and to show that under appropriate hypotheses, most classical results about topological connectedness can be generalized to this setting, in [9] to define and compare an internal notion of compact objects relative to a closure operator and relative to a class of morphisms, in [10] to show that $\mathrm{Alg}(T)$ as well as some other categories are topological, in [11] to provide a product theorem for c-compact objects which gives the known Tychonoff's Theorem, in [13] to investigate epireflective subcategories of topological categories by means of closure operators, in [14] to study initial closure operators which include both regular and normal closure operators, in [15] to study the concepts of isolated submodule, honest submodule, and relatively divisible submodule, in [16] in connection with semitopologies, in [17] to show certain fuzzy categories are topological and extended fuzzy topologies are given dually as a certain fuzzy closure operators, in [18] to study the notions of closed, open, initial and final morphism with respect to a closure operator, in [19] to give a connection between closure operators, weak Lawvere-Tierney topologies and weak Grothendieck topologies and in [21] to prove for a topological functor over B, every cocontinuous left action of $B(b,b)$ on any cocomplete poset can be realized as the final lift action associated to a canonically defined topological functor over B; to mention a few.

The categories we consider in this paper are generally quasicategories in the sense of [2], however we refer to them as categories.

For a given category $\mathcal{X}$, in Section 2 of the paper, we introduce the categories, $\mathrm{Cl}(\mathcal{X})$ $(\mathrm{Cl}_s(\mathcal{X}))$, of closure operators (respectively, semi-idempotent closure operators) and we show they can be fully embedded in the categories, $\mathrm{Prcls}_{\mathrm{LL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$ (respectively, $\mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$), of preclass-valued lax presheaves (respectively, preclass-valued semi presheaves). We also consider the cases where the domain of the closure operator is a complete preordered class, or a complete partially ordered class and fully embed the corresponding categories in complete preclass-valued lax presheaves, etc. In Section 3, we show the category $\mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$ can be fully embedded in the category $\mathrm{CAT}(\mathcal{X})$ of concrete categories over $\mathcal{X}$. In Section 4, we fully embed the category $\mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$ in the category, $\mathrm{WTop}_1(\mathcal{X})$, of weak 1-topological categories over $\mathcal{X}$. We also prove if the semi presheaves are complete preclass valued, then the embedding factors through the category, WTop($\mathcal{X}$), of weak topological categories over $\mathcal{X}$; and that if they are poclass valued, then the embedding factors through the category, Top($\mathcal{X}$), of topological categories over $\mathcal{X}$. We conclude this section by combining the previously obtained full embeddings to get (weak) topological categories from given closure operators. Finally, in Section 5, we give several examples.

2. Lax Presheaves via Closure Operators

For a category $\mathcal{X}$, we denote the collection of objects by $\mathcal{X}_0$ and the collection of morphisms by $\mathcal{X}_1$.

Definition 2.1. Let $\mathcal{X}$ be a category and for $x \in \mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1/x$ be the class of all morphisms to x. Define a preorder on $\mathcal{X}_1/x$, by $f \leq g$ if there is a morphism α such that $f = g \circ \alpha$ and let "$\sim$" be the equivalence relation generated by "$\leq$", so that $f \sim g$ if and only if $f \leq g$ and $g \leq f$. For $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}_1$, the above preorder and equivalence relation on $\mathcal{X}_1/x$ can be passed over to $\mathcal{M}/x$. Also we write $m \sim \mathcal{M}/x$ ($m \sim \mathcal{M}$) if there is $n \in \mathcal{M}/x$ ($n \in \mathcal{M}$) such that $m \sim n$.

Denoting a pullback of g along f by $f^{-1}(g)$, one can easily verify:

Lemma 2.2. *Let $f : x \longrightarrow y$ be a morphism and $g, h \in \mathcal{X}_1/y$ such that $f^{-1}(g)$ and $f^{-1}(h)$ exist.*

(i) *If $g \leq h$, then $f^{-1}(g) \leq f^{-1}(h)$.*
(ii) *If $g \sim h$, then $f^{-1}(g) \sim f^{-1}(h)$.*

Definition 2.3. $\mathcal{M}$ has $\mathcal{X}$-pullbacks if for all $f : x \longrightarrow y$ in $\mathcal{X}_1$, whenever $m \in \mathcal{M}/y$, then a pullback, $f^{-1}(m)$, of m along f exists and $f^{-1}(m) \in \mathcal{M}/x$.

Definition 2.4. Let $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}_1$ have $\mathcal{X}$-pullbacks. A closure operator $c_{\mathcal{M}}$ on $\mathcal{M}$ is a family of $\{c^x_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}/x \longrightarrow \mathcal{M}/x\}_{x \in \mathcal{X}_0}$ of functions with the following properties:

(i) For every $m \in \mathcal{M}/x$, $m \leq c^x_{\mathcal{M}}(m)$ (expansiveness),
(ii) For $m, n \in \mathcal{M}/x$ with $m \leq n$, $c^x_{\mathcal{M}}(m) \leq c^x_{\mathcal{M}}(n)$ (order preservation),
(iii) For every $f : x \longrightarrow y \in \mathcal{X}_1$ and $m \in \mathcal{M}/y$, $c^x_{\mathcal{M}}(f^{-1}(m)) \leq f^{-1}(c^y_{\mathcal{M}}(m))$ (continuity).

Sometimes we use the notations $\bar{f}$ or $c_{\mathcal{M}}(f)$ instead of $c^x_{\mathcal{M}}(f)$.

Definition 2.5. Let $\mathcal{X}$ be a category with a closure operator $c_{\mathcal{M}}$ on it.

(i) An object $m \in \mathcal{M}$ is called semi-closed if $\overline{m} \sim m$. A closure operator $c_{\mathcal{M}}$ is called semi-identity if all the members of $\mathcal{M}$ are semi-closed.
(ii) An object $m \in \mathcal{M}$ is called semi-idempotent if $\overline{m}$ is semi-closed. A closure operator $c_{\mathcal{M}}$ is called semi-idempotent if all the members of $\mathcal{M}$ are semi-idempotent.

Lemma 2.6. *Let $c_{\mathcal{M}}$ be a closure operator.*

(i) *If $m \in \mathcal{M}$ is semi-closed, then so is $f^{-1}(m)$.*
(ii) *If $m \in \mathcal{M}$ is semi-idempotent, then $f^{-1}(\overline{m})$ is semi-closed.*

Proof. (i) By Lemma 2.2 (ii), $f^{-1}(m) \leq \overline{f^{-1}(m)} \leq f^{-1}(\overline{m}) \sim f^{-1}(m)$. The result follows.

(ii) Follows from part (i) and the fact that $\overline{m}$ is semi-closed. $\square$

Definition 2.7. A closure morphism, $c : c_{\mathcal{M}} \longrightarrow c_{\mathcal{N}}$, from a closure operator $c_{\mathcal{M}}$ to a closure operator $c_{\mathcal{N}}$ is a family of order preserving maps $\{c^x : \mathcal{M}/x \longrightarrow \mathcal{N}/x\}_{x \in \mathcal{X}_0}$ such that for each $f : x \longrightarrow y$ in $\mathcal{X}_1$ and each m in $\mathcal{M}/y$, $c^x(f^{-1}(\overline{m})) \leq f^{-1}(\overline{c^y(m)})$.

The collection of the identities form a closure morphism $1_{c_{\mathcal{M}}} : c_{\mathcal{M}} \longrightarrow c_{\mathcal{M}}$ and for morphisms $c : c_{\mathcal{M}} \longrightarrow c_{\mathcal{N}}$ and $c' : c_{\mathcal{N}} \longrightarrow c_{\mathcal{K}}$, $c' \circ c(f^{-1}(\overline{m})) \leq c'(f^{-1}(\overline{c(m)})) \leq (f^{-1}(\overline{c'(c(m))}))$. Hence $c' \circ c$ is a closure morphism. So we have:

Lemma 2.8. *The closure operators in a category $\mathcal{X}$ whose domain has $\mathcal{X}$-pullbacks, together with the closure morphisms form a category.*

We denote the category of Lemma 2.8, whose objects are the closure operators in a category $\mathcal{X}$ for which the domain has $\mathcal{X}$-pullbacks, and whose morphisms are the closure morphisms, by $\mathrm{Cl}(\mathcal{X})$. The full subcategory of $\mathrm{Cl}(\mathcal{X})$ whose objects are semi-idempotent is denoted by $\mathrm{Cl}_s(\mathcal{X})$.

With Prcls the category of preclasses with order preserving maps, we have:

Definition 2.9. (a) A preclass valued lax presheaf $M : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Prcls}$ is a map that satisfies the following two conditions:
(i) For each $x \in \mathcal{X}$, $1_{M(x)} \leq M(1_x)$.
(ii) For each $f, g \in \mathcal{X}_1$, $M(f \circ g) \leq M(g) \circ M(f)$.
A preclass valued semi presheaf is a preclass valued lax presheaf satisfying

(ii)′ For each $f, g \in \mathcal{X}_1$, $M(f \circ g) \sim M(g) \circ M(f)$.

(b) A lax natural transformation $\varphi : M \longrightarrow M'$ is a transformation such that for each morphism $f : x \longrightarrow y$, one has $\varphi_x \circ M(f) \leq M'(f) \circ \varphi_y$.

If $\varphi : M \longrightarrow M'$ and $\psi : M' \longrightarrow M''$ are lax natural transformations, then for each morphism $f : x \longrightarrow y$ we have $(\psi \circ \varphi)_x \circ M(f) \leq \psi_x \circ M'(f) \circ \varphi_y \leq M''(f) \circ \psi_y \circ \varphi_y = M''(f) \circ (\psi \circ \varphi)_y$. So $\psi \circ \varphi$ is a lax natural transformation. It follows that:

Lemma 2.10. *Lax presheaves and lax natural transformations on $\mathcal{X}$ form a category.*

We denote the category of Lemma 2.10 by $\mathrm{Prcls}_{\mathrm{LL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$ and its full subcategory whose objects are semi presheaves by $\mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$.

Definition 2.11. For $c_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ in $\mathrm{Cl}(\mathcal{X})$, let $M_c : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Prcls}$ be the mapping that takes $f : x \longrightarrow y$ to $M_c(f) : \mathcal{M}/y \longrightarrow \mathcal{M}/x$, where $M_c(f)(m) = f^{-1}(\overline{m})$ for f the identity morphism, we pick f^{-1} to act like identity.

Proposition 2.12. *M_c is a lax presheaf.*

Proof. Since $\mathcal{M}$ has $\mathcal{X}$-pullbacks, $M_c(f)$ is well-defined. For $m, n \in \mathcal{M}/y$ with $m \leq n$, $\overline{m} \leq \overline{n}$ and consequently for each $f : x \longrightarrow y$, $f^{-1}(\overline{m}) \leq f^{-1}(\overline{n})$. So $M_c(f)$ is a morphism in Prcls.

For $m \in M_c(x)$ and morphisms $f : x \longrightarrow y$ and $g : y \longrightarrow z$, we have $m \leq \overline{m} = M_c(1)(m)$ and $M_c(g \circ f)(m) = (g \circ f)^{-1}(\overline{m}) \sim f^{-1} \circ g^{-1}(\overline{m}) \leq f^{-1}(\overline{g^{-1}(\overline{m})}) = M_c(f) \circ M_c(g)(m)$. So $M_c : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Prcls}$ is a lax presheaf. □

Definition 2.13. For $c : c_{\mathcal{M}} \longrightarrow c_{\mathcal{N}}$ in $\mathrm{Cl}(\mathcal{X})$, let $\theta_c : M_c \longrightarrow N_c$ be the transformation defined by the collection $\{c^x : \mathcal{M}/x \longrightarrow \mathcal{N}/x\}_{x \in \mathcal{X}_0}$, so that $(\theta_c)_x = c^x$.

Proposition 2.14. *θ_c is a lax natural transformation.*

Proof. For each m, we have $(\theta_c)_x \circ M_c(f)(m) = (\theta_c)_x(f^{-1}(\overline{m})) = c^x(f^{-1}(\overline{m})) \leq f^{-1}(\overline{c^y(m)}) = N_c(f)(c^y(m)) = N_c(f) \circ (\theta_c)_y(m)$. Hence θ_c is a lax natural transformation. □

Theorem 2.15. (i) *The mapping $\mathbb{L} : \mathrm{Cl}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Prcls}_{\mathrm{LL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$, that takes the object $c_{\mathcal{M}}$ to M_c and the morphism $c : c_{\mathcal{M}} \longrightarrow c_{\mathcal{N}}$ to θ_c, is a full embedding.*

(ii) *The full embedding $\mathbb{L}$ restricted to $\mathrm{Cl}_s(\mathcal{X})$ factors through $\mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$, yielding a full embedding $\mathbb{L}_s : \mathrm{Cl}_s(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$.*

Proof. (i) One can easily verify that $\mathbb{L}$ is a faithful functor.

Now we show $\mathbb{L}$ is one to one on objects. For this aim let $\mathbb{L}(c_{\mathcal{M}}) = \mathbb{L}(c_{\mathcal{N}})$. So for each $x \in \mathcal{X}_0$ we have $\mathcal{M}/x = \mathcal{N}/x$, and therefore $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. Also for $1_x : x \longrightarrow x$ and each $m \in \mathcal{M}$ we have $M_c(1_x)(m) = N_c(1_x)(m)$, i.e $c_{\mathcal{M}}(m) = c_{\mathcal{N}}(m)$, consequently $c_{\mathcal{M}} = c_{\mathcal{N}}$.

Faithfulness and the fact that $\mathbb{L}$ is one to one on objects renders $\mathbb{L}$ an embedding.

Finally to show $\mathbb{L}$ is full, let $\theta : M_c \longrightarrow N_c$ be in $\hom(\mathbb{L}(c_{\mathcal{M}}), \mathbb{L}(c_{\mathcal{N}}))$. Define $c : c_{\mathcal{M}} \longrightarrow c_{\mathcal{N}}$ by $c(f) = \theta(f)$. Since $c(f^{-1}(\overline{m})) = \theta(f^{-1}(\overline{m})) = \theta(M(f)(m)) \leq N(f)(\theta(m)) = f^{-1}(\overline{c(m)})$, c is in $\hom(c_{\mathcal{M}}, c_{\mathcal{N}})$ and it easily follows that $\mathbb{L}(c) = \theta$.

(ii) We first need to show that for each object $c_{\mathcal{M}}$ in $\mathrm{Cl}_s(\mathcal{X})$, $\mathbb{L}(c_{\mathcal{M}})$ is a semi presheaf. Let $c_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ be in $\mathrm{Cl}(\mathcal{X})$. For $m \in M_c(x)$, we have $m \leq \overline{m} \sim M_c(1)(m)$; and for morphisms $f : x \longrightarrow y$ and $g : y \longrightarrow z$, since $c_{\mathcal{M}}$ is a semi-idempotent closure operator, Lemma 2.6 implies, $M_c(g \circ f)(m) = (g \circ f)^{-1}(\overline{m}) \sim f^{-1} \circ g^{-1}(\overline{m}) \sim f^{-1}(\overline{g^{-1}(\overline{m})}) = M_c(f) \circ M_c(g)(m)$. Hence M_c is a semi presheaf.

The fact that $\mathbb{L}$ is an embedding will easily imply that so is $\mathbb{L}_s$. $\square$

Definition 2.16. Let $\mathcal{M}$ be a collection of morphisms in $\mathcal{X}$ and $c_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ be a closure operator.

(i) $\mathcal{M}$ is locally complete if for all $x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{M}/x$ is complete, i.e. it has meets.
(ii) $\mathcal{M}$ is stably locally complete if it is complete, it has $\mathcal{X}$-pullbacks, and for all morphisms $f : x \longrightarrow y$, $f^{-1} : \mathcal{M}/y \longrightarrow \mathcal{M}/x$ preserves meets.
(iii) $c_{\mathcal{M}}$ is meet preserving if $\mathcal{M}$ is stably locally complete and for all x, the mapping $c^x_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}/x \longrightarrow \mathcal{M}/x$ preserves meets.

We denote by $\mathrm{CmCl}_s(\mathcal{X})$ (respectively $\mathrm{CmPoCl}_s(\mathcal{X})$, the full subcategory of $Cl_s(\mathcal{X})$ whose objects are meet preserving (respectively meet preserving with domain a poset). Also let 'Cmprcls' (respectively 'Cmpocls') be the subcategory of 'Prcls' whose objects are complete (respectively complete and partially ordered) and whose morphisms are meet preserving and denote by $\mathrm{Cmprcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$ (respectively $\mathrm{Cmpocls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$) the category whose objects are semi presheaves $M : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Cmprcls}$ (respectively $M : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Cmpocls}$). We have:

Corollary 2.17. *The full embedding* $\mathbb{L}_s : Cl_s(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$ *restricts to give:*

(i) *the full embedding* $\mathbb{L}_s : \mathrm{CmCl}_s(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Cmprcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$.
(ii) *the full embedding* $\mathbb{L}_s : \mathrm{CmPoCl}_s(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Cmpocls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$.

Proof. Follows easily. $\square$

3. Concrete Functors via Lax Presheaves

Definition 3.1. For $M : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Prcls}$ in $\mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$, let $\int_{\mathcal{X}} M$ have objects (x, a) with $a \in M(x)$ and morphisms $\tilde{f} : (x, a) \longrightarrow (y, b)$ corresponding to morphisms $f : x \longrightarrow y$ in $\mathcal{X}$ for which $a \leq M(f)(b)$. Also define $\dot{M} : \int_{\mathcal{X}} M \longrightarrow \mathcal{X}$ to take $\tilde{f} : (x, a) \longrightarrow (y, b)$ to $f : x \longrightarrow y$.

Proposition 3.2. *$(\int_{\mathcal{X}} M, \dot{M})$ is a concrete category.*

Proof. For each $a \in M(x)$ we have $a \leq M(1)(a)$, so $\tilde{1}_x : (x, a) \longrightarrow (x, a)$ is a morphism. Also if $\tilde{f} : (x, a) \longrightarrow (y, b)$ and $\tilde{g} : (y, b) \longrightarrow (z, c)$ are morphisms, then $a \leq M(f)(b) \leq M(f) \circ M(g)(c) \sim M(g \circ f)(c)$ meaning $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ is a morphism. Hence $\int_{\mathcal{X}} M$ is a category. It follows easily that $\dot{M}$ is a faithful functor. □

The category $\int_{\mathcal{X}} M$ is a generalization of the category of elements as defined in [20].

Definition 3.3. For $\theta : M \longrightarrow N$ in $\mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$, let $\dot{\theta} : \int_{\mathcal{X}} M \longrightarrow \int_{\mathcal{X}} N$ be defined by taking $\tilde{f} : (x, a) \longrightarrow (y, b)$ in $\int_{\mathcal{X}} M$ to $\tilde{f} : (x, \theta_x(a)) \longrightarrow (y, \theta_y(b))$ in $\int_{\mathcal{X}} N$.

Proposition 3.4. *$\dot{\theta} : \dot{M} \longrightarrow \dot{N}$ is a concrete functor.*

Proof. Obviously $\dot{\theta}$ is well-defined on objects. To show it is well-defined on morphisms, let $\tilde{f} : (x, a) \longrightarrow (y, b)$ be given in $\int_{\mathcal{X}} M$. So $a \leq M(f)(b)$. Since θ_x preserves order, $\theta_x(a) \leq \theta_x(M(f)(b))$. Since θ is lax, $\theta_x(M(f)(b)) \leq N(f)(\theta_y(b))$. Therefore $\theta_x(a) \leq N(f)(\theta_y(b))$, implying the morphism $f : x \longrightarrow y$ lifts uniquely to $\tilde{f} : (x, \theta_x(a)) \longrightarrow (y, \theta_y(b))$ in $\int_{\mathcal{X}} N$. It then follows easily that $\dot{\theta}$ is a concrete functor. □

With $\mathrm{CAT}(\mathcal{X})$ denoting the category whose objects are the concrete categories over $\mathcal{X}$ and whose morphisms are the concrete functors between them, we have:

Theorem 3.5. *The mapping $\mathbb{C} : \mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathrm{CAT}(\mathcal{X})$ that takes the morphism $\theta : M \longrightarrow N$ to $\dot{\theta} : \dot{M} \longrightarrow \dot{N}$ is a full embedding.*

Proof. It follows easily that $\mathbb{C}$ is a functor. To show it is faithful, let $M \underset{\theta'}{\overset{\theta}{\rightrightarrows}} N$ be morphisms in $\mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$ such that $\dot{\theta} = \dot{\theta}'$. Then $\dot{\theta}(x, a) = \dot{\theta}'(x, a)$, and so $(x, \theta_x(a)) = (x, \theta'_x(a))$. Therefore $\theta_x(a) = \theta'_x(a)$, implying $\theta = \theta'$.

Next we show $\mathbb{C}$ is one to one on objects. So suppose $\dot{M} = \dot{N}$. It follows that $\int_{\mathcal{X}} M = \int_{\mathcal{X}} N$. Now if $a \in M(x)$, then $(x, a) \in \int_{\mathcal{X}} M$ and so $(x, a) \in \int_{\mathcal{X}} N$, which implies $a \in N(x)$. Therefore $M(x) \subseteq N(x)$. Similarly $N(x) \subseteq M(x)$. Hence $M = N$. It now follows that $\mathbb{C}$ is an embedding.

Finally to show fullness, let $F : \dot{M} \longrightarrow \dot{N}$ be a morphism in $\mathrm{CAT}(\mathcal{X})$. Since $\dot{N} \circ F = \dot{M}$, if $F(x,a) = (y,b)$, then $y = x$. We define $\theta : M \longrightarrow N$ so that $\theta_x(a)$ is the second component of $F(x,a)$. Therefore we have $F(x,a) = (x, \theta_x(a))$. To show θ is lax, let $f : x \longrightarrow y$ be a morphism in $\mathcal{X}$ and $b \in M(y)$. Then f lifts to $\tilde{f} : (x, M(f)(b)) \longrightarrow (y,b)$ in $\int_{\mathcal{X}} M$ and so $F(\tilde{f}) : (x, \theta_x(M(f)(b))) \longrightarrow (y, \theta_y(b))$ is in $\int_{\mathcal{X}} N$. Therefore, with $\tilde{g} = F(\tilde{f})$, $\theta_x(M(f)(b)) \leq N(g)(\theta_y(b))$. But $\dot{N} \circ F(\tilde{f}) = \dot{M}(\tilde{f})$ implies $g = f$ and so $\theta_x(M(f)(b)) \leq N(f)(\theta_y(b))$. Hence θ is lax.

It is obvious that $\dot{\theta} = F$. □

4. Topological Functors via Closure Operators

Definition 4.1. A functor $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ is said to be weak (1-)topological if every structured (1-)source $(f_i : x \longrightarrow y_i = G(b_i))_I$ has an initial lift $(\widetilde{f_i} : a \longrightarrow b_i)_I$.

Proposition 4.2. (i) *For* $M \in \mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$, $\dot{M} : \int_{\mathcal{X}} M \longrightarrow \mathcal{X}$ *is weak 1-topological.*

(ii) *For* $M \in \mathrm{Cmprcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$, $\dot{M} : \int_{\mathcal{X}} M \longrightarrow \mathcal{X}$ *is weak topological.*

(iii) *For* $M \in \mathrm{Cmpocls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}$, $\dot{M} : \int_{\mathcal{X}} M \longrightarrow \mathcal{X}$ *is topological.*

Proof. (i) If $f : x \longrightarrow y = \dot{M}(y,a)$ is an $\dot{M}$-structured morphism, then obviously $\widetilde{f} : (x, M(f)(a)) \longrightarrow (y,a)$ is a lift of f. To show $\widetilde{f} : (x, M(f)(a)) \longrightarrow (y,a)$ is initial, suppose $g : z \longrightarrow x$ is such that $f \circ g$ has a lift $\widetilde{f \circ g} : (z,c) \longrightarrow (y,a)$, then $c \leq M(f \circ g)(a) \sim M(g)(M(f)(a))$. Hence there is a lift $\widetilde{g} : (z,c) \longrightarrow (x, M(f)(a))$ of g.

(ii) Consider an $\dot{M}$-structured source $S = (f_i : x \longrightarrow y_i = \dot{M}(y_i, a_i))_I$ over I. For each $i \in I$, $M(f_i)(a_i) \in M(x)$ which is a complete preclass. Let a be a meet of $M(f_i)(a_i)$. We show that $\widetilde{S} = (\widetilde{f_i} : (x,a) \longrightarrow (y_i, a_i))_I$ is an initial lift of the source S. If $g : z \longrightarrow x$ is such that $S \circ g$ has a lift $P = (\widetilde{f_i \circ g} : (z,c) \longrightarrow (y_i, a_i))_I$, then for each i we have $c \leq M(f_i \circ g)(a_i) \sim M(g)(M(f_i)(a_i))$. Since $M(g)$ is a morphism in Cmprcls, it preserves meets. Hence we have $c \leq M(g)(a)$, i.e. there is a lift $\widetilde{g} : (z,c) \longrightarrow (x,a)$ of g.

(iii) If $(x,a) \sim (x,b)$ in $\dot{M}^{-1}(x)$, then $a \sim b$ in $M(x)$ and so $a = b$. Therefore $\dot{M}$ is amnestic. By part (ii) $\dot{M}$ is weak topological, hence it is topological. □

Denoting by $\mathrm{WTop}_1(\mathcal{X})$ (respectively $\mathrm{WTop}(\mathcal{X})$, $\mathrm{Top}(\mathcal{X})$) the full subcategory of $\mathrm{CAT}(\mathcal{X})$ whose objects are weak 1-topological (respectively weak topological, topological), we have:

Theorem 4.3. *We have:*

(i) *The full embedding* $\mathbb{C} : \mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathrm{CAT}(\mathcal{X})$ *factors through* $\mathrm{WTop}_1(\mathcal{X})$, *yielding a full embedding* $\mathbb{C} : \mathrm{Prcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathrm{WTop}_1(\mathcal{X})$.

(ii) *The full embedding* $\mathbb{C} : \mathrm{Cmprcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathrm{CAT}(\mathcal{X})$ *factors through* $\mathrm{WTop}(\mathcal{X})$, *yielding a full embedding* $\mathbb{C} : \mathrm{Cmprcls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathrm{WTop}(\mathcal{X})$.

(iii) *The full embedding* $\mathbb{C} : \mathrm{Cmpocls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathrm{CAT}(\mathcal{X})$ *factors through* $Top(\mathcal{X})$, *yielding a full embedding* $\mathbb{C} : \mathrm{Cmpocls}_{\mathrm{SL}}^{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathrm{Top}(\mathcal{X})$.

Proof. Follows from Theorem 3.5 and Proposition 4.2. □

Corollary 4.4. *We have the following full embeddings.*

(i) $W_1 : \mathrm{Cl}_s(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{WTop}_1(\mathcal{X})$.

(ii) $W : \mathrm{CmCl}_s(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{WTop}(\mathcal{X})$.

(iii) $T : \mathrm{CmPoCl}_s(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Top}(\mathcal{X})$.

Proof. Composing the full embeddings given in Theorem 2.15, Corollary 2.17 and Theorem 4.3 yields the given full embeddings. □

5. Examples

Lemma 5.1. *Let* $U : \mathcal{X} \longrightarrow$ *Set be a construct, Epi be the collection of all the epis in* $\mathcal{X}$ *and Iinc* $= \{i : a \longrightarrow x : i$ *is initial and* $U(i)$ *is the inclusion*$\}$. *Suppose* $\mathcal{X}$ *has pullbacks and unique (Epi, Iinc)-factorization that is pullback stable. If the collection* $\mathcal{M} \supseteq$ *Iinc has* $\mathcal{X}$*-pullbacks and satisfies:* $m = i \circ e$ *with* $m \in \mathcal{M}$, $e \in$ *Epi and* $i \in$ *Iinc, implies* e *is a retraction, then:*

(i) $\mathcal{M}$ *is (stably) locally complete if Iinc is.*

(ii) *any closure operator* $\overline{(\ )}$: *Iinc* $\longrightarrow$ *Iinc extends to a closure operator on* $\mathcal{M}$ *such as* $c : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$. *Furthermore* c *is idempotent if* $\overline{(\ )}$ *is.*

Proof. (i) Suppose Iinc is locally complete. Given any collection $m_\alpha \in \mathcal{M}/x$ for some x, let $m_\alpha = i_\alpha \circ e_\alpha$ be the factorization of m_α. Using the fact that e_α is a retraction, one can easily verify that any meet of the collection i_α is a meet of the collection m_α.

Now suppose Iinc is stably locally complete. Given a morphism $f : x \longrightarrow y$ and a collection $m_\alpha : b_\alpha \longrightarrow y$ in $\mathcal{M}/y$, let $m_\alpha = i_{m_\alpha} \circ e_{m_\alpha}$ be the factorization of m_α, and n_α be the pullback of m_α along f. Since factorizations are pullback stable,

$i_{n_\alpha} = f^{-1}(i_{m_\alpha})$. So $\wedge n_\alpha = \wedge i_{n_\alpha} = \wedge f^{-1}(i_{m_\alpha}) = f^{-1}(\wedge i_{m_\alpha}) = f^{-1}(\wedge m_\alpha)$, as required.

(ii) Given $m : a \longrightarrow x$ in $\mathcal{M}/x$, let $m = i_m \circ e_m$ with $e_m \in$ Epi and $i_m \in$ Iinc. Define $c(m) = \overline{i_m}$. Since $m \leq i_m$ and $i_m \leq \overline{i_m}$, $m \leq c(m)$. If $m \leq n$ via α (i.e. $m = n \circ \alpha$), then $i_m \leq i_n$ via $e_n \circ \alpha \circ s_m$, where s_m is the right inverse of e_m which exists since $m \in \mathcal{M}$. So $(m) = \overline{i_m} \leq \overline{i_n} = c(n)$. Finally suppose $f : x \longrightarrow y$ is a morphism in $\mathcal{X}$ and $m \in \mathcal{M}/y$. Let n be the pullback of m along f. Since factorizations are pullback stable, $i_n = f^{-1}(i_m)$. So $c(n) = \overline{i_n} = \overline{f^{-1}(i_m)} \leq f^{-1}(\overline{i_m}) = f^{-1}(c(m))$, as desired. Hence c is a closure operator on $\mathcal{M}$. If $m \in$ Iinc, then $i_m = m$ and so $c(m) = \overline{i_m} = \overline{m}$. Hence c is an extension of the given closure operator.

Also with $m \in \mathcal{M}$, we have $c(m) = \overline{i_m} \in$ Iinc. So $c(c(m)) = c(\overline{i_m}) = \overline{\overline{i_m}}$, rendering c idempotent if $\overline{(\ )}$ is. $\square$

Example 5.2. Consider the category Set as a construct over Set via the identity functor. The collection Iinc of Lemma 5.1 is the collection Inc of all the inclusions which is stably locally complete. So if $\mathcal{M}$ is a class of morphisms that has $\mathcal{X}$-pullbacks and contains all the inclusions ($\mathcal{M}$ can be the collection of inclusions, the collection of monos, or the collection of all the morphisms, among others), then all the conditions of Lemma 5.1 are met, and so $\mathcal{M}$ is stably locally complete.

Next consider the identity closure operator on Inc. By Lemma 5.1, we get an idempotent closure operator c on M. $c(m)$ is just the image of m. Note that each inclusion is closed and every morphism $m \in \mathcal{M}$ is semi-closed (because $m = i_m \circ e_m$ and e_m is a retraction). Hence c is a semi-identity closure operator.

The associated category $\int M$, related to this closure operator, has objects (X, m), where X is a set and $m : A \longrightarrow X$ is in $\mathcal{M}$ for some set A; and has morphisms $f : (X, m) \longrightarrow (Y, n)$, where $f : X \longrightarrow Y$ is a function such that $m \leq f^{-1}(c(n))$ or equivalently $Im_{f \circ m} \subset Im_n$ or equivalently $f \circ m \leq n$. This category over Set is, by Corollary 4.4 (ii), a weak topological construct.

Example 5.3. Consider the category Top of topological spaces and continuous functions as a construct over Set via the forgetful functor. The collection Iinc of Lemma 5.1 is the collection Inc of all the inclusions (with the subspace topology) which is stably locally complete. So if $\mathcal{M}$ is a class of morphisms that has $\mathcal{X}$-pullbacks and contains all the inclusions such that in the (Epi, Inc)-factorization of each m in $\mathcal{M}$, the epi factor is a retraction ($\mathcal{M}$ can be the collection of inclusions, the collection of embeddings (i.e., initial monos), among others), then all the conditions of Lemma 5.1 are met, and so $\mathcal{M}$ is stably locally complete.

Consider the following closure operators on Inc, that take the inclusion map $i : A \longrightarrow X$ to the inclusion map $\bar{i} : \overline{A} \longrightarrow X$, [7], where $\overline{A}$ is:

(i) the intersection of all closed subsets of X containing A.
(ii) the intersection of all clopen subsets of X containing A.
(iii) the union of A with all connected subsets of X that intersect A.
(iv) the set of all $x \in X$ such that for every neighborhood U of x, $A \cap \bar{\{x\}} \cap U \neq \emptyset$, that $\bar{\{x\}}$ is the topological closure of the subset $\{x\}$.
(v) the set of all $x \in X$ such that for every neighborhood U of x, $A \cap \bar{U} \neq \emptyset$, that $\bar{U}$ is the topological closure of the subset U.

By Lemma 5.1, each of the above closure operators yield a closure operator c on $\mathcal{M}$, where $c(m) = \overline{i_m}$, with i_m the image of m. All the above closure operators are idempotent except the one in part (v). So in cases (i) to (iv), we may consider the categories $\int M$ related to these closure operators. Objects of these categories are (X, m), where $m : A \longrightarrow X$ is in $\mathcal{M}$ and morphisms are $f : (X, m) \longrightarrow (Y, n)$, where $f : X \longrightarrow Y$ is a continuous function such that $m \leq f^{-1}(c(n))$ or equivalently $f \circ m \leq \overline{i_n}$. These categories over Top are, by Corollary 4.4 (ii), weak topological.

Example 5.4. Consider the category Grp of groups and group homomorphisms as a construct over Set via the forgetful functor. The collection Iinc of Lemma 5.1 is the collection Inc of all the inclusions (with the subgroup structure) which is stably locally complete. So if $\mathcal{M}$ is a class of morphisms that has $\mathcal{X}$-pullbacks and contains all the inclusions such that in the $(\mathrm{Epi}, \mathrm{Inc})$-factorization of each m in $\mathcal{M}$, the epi factor is a retraction ($\mathcal{M}$ can be the collection of inclusions, the collection of initial monos, among others), then all the conditions of Lemma 5.1 are met, and so $\mathcal{M}$ is stably locally complete.

Consider the following closure operators on Inc, that take the inclusion map $i : A \longrightarrow X$ to the inclusion map $\bar{i} : \overline{A} \longrightarrow X$, [7], where $\overline{A}$ is:

(i) the intersection of all normal subgroups of X containing A.
(ii) the intersection of all normal subgroups K of X containing A such that X/K is Abelian.
(iii) the intersection of all normal subgroups K of X containing A such that X/K is torsion-free.
(iv) the subgroup generated by A and by all perfect subgroups of X.

By Lemma 5.1, each of the above closure operators yield a closure operator c on $\mathcal{M}$, where $c(m) = \overline{i_m}$, with i_m the image of m. All the above closure operators are idempotent except the one in part (iv). So in cases (i) to (iii), we may consider the categories $\int M$ related to these closure operators. Objects of these categories are (X, m), where $m : A \longrightarrow X$ is in $\mathcal{M}$ and morphisms are $f : (X, m) \longrightarrow (Y, n)$, where $f : X \longrightarrow Y$ is a group homomorphism such that $m \leq f^{-1}(c(n))$ or equivalently $f \circ m \leq \overline{i_n}$. These categories over Grp are, by Corollary 4.4 (ii), weak topological.

Example 5.5. Consider the category Set_* of pointed sets and point preserving functions. Let $\mathcal{M}$ be any collection of morphisms that has $\mathcal{X}$-pullbacks and is stably locally complete. Define $c : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ to take the morphism $m : (A, a_0) \longrightarrow (X, x_0)$ to $m \oplus \hat{x}_0 : (A \coprod 1, a_0) \longrightarrow (X, x_0)$, where 1 is the terminal and $\hat{x}_0 : 1 \longrightarrow X$ is the map taking the point to x_0. Now $m \leq m \oplus \hat{x}_0$ via $\nu_1 : A \longrightarrow A \coprod 1$, the first injection to the coproduct. If $m \leq n$ via ϕ, then $m \oplus \hat{x}_0 \leq n \oplus \hat{x}_0$ via $\phi \coprod 1$. Finally, given $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ and $m : (B, b_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, let $n : (A, a_0) \longrightarrow (X, x_0)$ be the pullback of m along f. Then $c(f^{-1}(m)) = c(n) = n \oplus \hat{x}_0$ and $f^{-1}(c(m)) = f^{-1}(m \oplus \hat{y}_0) = n \oplus i$, where $i : (f^{-1}(y_0), x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ is the inclusion. But $n \oplus \hat{x}_0 \leq n \oplus i$ via $1 \coprod \hat{x}_0$. Hence c is a closure operator.

Now for $m : (A, a_0) \longrightarrow (X, x_0)$ in $\mathcal{M}$, $c(m) = m \oplus \hat{x}_0$ and $c(c(m)) = m \oplus \hat{x}_0 \oplus \hat{x}_0$. Since $m \oplus \hat{x}_0 \oplus \hat{x}_0 \leq m \oplus \hat{x}_0$ via $1 \coprod (1 \oplus 1) : (A \coprod 1 \coprod 1, a_0) \longrightarrow (A \coprod 1, a_0)$, $m \oplus \hat{x}_0 \sim m \oplus \hat{x}_0 \oplus \hat{x}_0$. Hence c is semi-idempotent but obviously not idempotent.

The corresponding weak topological category can be constructed as in the previous examples.

Example 5.6. Let $(X, \leq)$ be a complete partially ordered set and $\mathcal{X} = C(X, \leq)$ be the associated category. With $\mathcal{M} = \mathcal{X}_1$ and c the identity closure operator on $\mathcal{M}$, the corresponding category $\int M$ has objects (x, x') with $x' \leq x$ and there is a unique morphism $f : (x, x') \longrightarrow (y, y')$ if and only if $x \leq y$ and $y' \wedge x \leq x'$. By Corollary 4.4 (iii), this category is topological over $\mathcal{X}$.

References

[1] J. Adámek, H. Herrlich, J. Rosicky and W. Tholen, Weak factorization systems and topological functors, *Applied Categorical Structures* **10** (2002), 237–249.

[2] J. Adamék, H. Herrlich and G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley and Sons, 1990. `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/17/tr17.pdf`

[3] M. Baran, Compactness, perfectness, separation, minimality and closedness with respect to closure operators, *Applied Categorical Structures* **10** (2002), 403–415.

[4] H. L. Bentley and H. Herrlich, Merotopological spaces, *Applied Categorical Structures* **12** (2004), 155–180.

[5] H. L. Bentley and E. Lowen-Colebunders, Initial morphisms versus embeddings, *Applied Categorical Structures* **12** (2004), 361–367.

[6] L. M. Brown, R. Ertürk and Ş. Dost, Ditopological texture spaces and fuzzy topology, II. Topological considerations, *Fuzzy Sets and Systems* **147** (2004), 201–231.

[7] G. Castellini, *Categorical Closure Operators*, Birkhäuser, Boston 2003.

[8] G. Castellini, Connectedness with respect to a closure operator, *Applied Categorical Structures* **9** (2001), 285–302.

[9] M. M. Clementino, On categorical notions of compact objects, *Applied Categorical Structures* **4** (1996), 15–29.

[10] M. M. Clementino and D. Hofmann, Topological features of lax algebras, *Applied Categorical Structures* **11** (2003), 267–286.

[11] M. M. Clementino and W. Tholen, Tychonoff's theorem in a category, *Proceedings of the American Mathematical Society* **124** (1996), 3311–3314.

[12] D. Dikranjan and W. Tholen, *Categorical Structure of Closure Operators*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands 1995.

[13] D. Dikranjan, E. Giuli and A. Tozzi, Topological categories and closure operators, *Quaestiones Mathematicae* **11** (1988), 323–337.

[14] T. H. Fay, Weakly hereditary initial closure operators, *Applied Categorical Structures* **8** (2000), 415–431.

[15] T. H. Fay and S. V. Joubert, Isolated submodules and skew fields, *Applied Categorical Structures* **8** (2000), 317–326.

[16] J. Fillmore, D. Pumplün and H. Röhrl, On N-summations, I, *Applied Categorical Structures* **10** (2002), 291–315.

[17] W. Gähler, A. S. Abd-Allah and A. Kandil, On extended fuzzy topologies, *Fuzzy Sets and Systems* **109** (2000), 149–172.

[18] E. Giuli and W. Tholen, Openness with respect to a closure operator, *Applied Categorical Structures* **8** (2000), 487–502.

[19] S. N. Hosseini and S. Sh. Mousavi, A relation between closure operators on a small category and its category of presheaves, *Applied Categorical Structures* **14** (2006), 99–110.

[20] S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory*, Springer-Verlag New York Inc. 1992.

[21] M. V. Mielke, Final lift actions associated with topological functors, *Applied Categorical Structures* **10** (2002), 495–504.