Çankaya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi,
Journal of Arts and Sciences Sayı: 4 / Aralık 2005

Ağır Kuyruklu Dağılımlarda Monte Carlo Simulasyonu ile Konum Parametresinin Analizi

Onur KÖKSOY[*], *Bahatdin DAŞBAŞI*

Özet

Konum parametresinin klasik tahmin edicileri ağır kuyruklu dağılımlara karşı oldukça duyarlı davranışlar sergilemektedir. Ağır kuyruklu dağılımlar, normal dağılıma kıyasla, kuyruklarda daha fazla yığılmaya neden olurlar ve özellikle küçük örnek çaplarında aykırı değerler üretme eğilimindedirler. Ağır kuyruklu dağılımlar ailesinin bazı üyeleri ε-bozulmuş normal dağılımlardır. Bu çalışmada, ε-bozulmuş normal aile üzerinde tasarlanmış Monte-Carlo simulasyonu ile değişik tahmin edicilerin güçlülük özellikleri araştırılacaktır. Normal dağılımı bozmada kullanılacak simetrik dağılımlar, varyansı birden büyük olan normal dağılım, bir, beş ve on serbestlik dereceli t dağılımı ve konum parametresi sıfır ve dağılma parametresi bir olan Laplace dağılımıdır. Karşılaştırma kriteri olarak hata kareler ortalamasına bağlı göreli etkinlikler ve normale uyumun testi için Anderson-Darling istatistiği önerilmiştir.

Anahtar Sözcükler: *Konum Parametresi, Ağır Kuyruklu Dağılımlar, Etkinlik, Güçlü Tahmin Ediciler.*

Abstract

Classical estimators of location are quite sensitive to distributions which have heavy tails. "Heavy-tailed" distributions place more mass in the tails compared to the normal distribution. These heavy-tailed distributions are much more likely to give rise to outliers in small samples than we can expect from the normal distribution. Some members of this family include the so-called epsilon-contaminated normal distributions. In this study we utilize the epsilon-contaminated family and design a Monte Carlo experiment to investigate the robustness properties of a variety of different estimators. Three types of symmetric densities are considered for generating data, specifically a normal distribution with variance greater than one, a t with one, five and ten degrees of freedom, and a Laplace with location zero and scale one. Relative efficiencies based on mean square error criteria are computed and used for comparative purposes. The Anderson-Darling statistic will be used to compare the fit of different distributions.

Key Words: *Location Parameter, Heavy-tailed Distributions, Efficiency, Robust Estimators.*

* Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 51200 Niğde
E-mail: okoksoy@nigde. edu.tr

1. GİRİŞ

Aykırı değerler üretme eğiliminde olan ağır kuyruklu dağılımların incelenmesi önemli bir konudur. Bu makalede, ağır kuyruklu bazı dağılımlar incelenecek, tasarlanmış konum modelleri üzerinde değişik konum tahmin edicileri önerilecek ve tahmin ediciler arasındaki etkinlik karşılaştırmalarına yer verilecektir. Böylece, incelenen dağılımların merkezsel özellikleri hakkında somut bilgilerin ortaya çıkarılması ana hedefimizi oluşturacaktır.

Verilerin analizi sırasında iki sorunla karşılaşılır. Bu sorunlardan biri elde edilen gözlemlerin %1-10'unun şüpheli gözlem durumunda olmasıdır. Şüpheli gözlemlerin ortaya çıkma nedeni;

- Yanlış ölçümler,
- Yanlış ondalık virgüller,
- Yanlış kopyalama ve
- Basitçe açıklanamayan durumlardır.

İkinci sorun ise, verilerin ender durumlarda normal dağılıma sahip olması ve genellikle normalden daha ağır kuyruklu olma eğilimi göstermeleridir. Güçlü tahmine ihtiyaç duyulma nedeni aykırı değerlere duyarsız olması yada ağır kuyruklu dağılımlar için halâ yüksek etkinlikte olmasıdır. Güçlü tahminin temel amacı, kuşku duyulmayan önemli hatalara karşı bir koruma oluşturma, sorunlu aykırı değerlerin etkisini yok etme ve istenirse bunları ortadan kaldırma ve halâ optimale yakın çözümler veren parametrik modelleri uygulama biçiminde özetlenebilir [1].

2. GÜÇLÜ TAHMİNCİ KAVRAMI VE DEĞİŞTİRİLMİŞ KONUM MODELİ

On sekizinci yüzyılda **"***robust***"** sözcüğü sağlam, sert, kaba ve bayağı birini tanımlamak üzere kullanılmaya başlanmış ve dilin gelişimi sözcükteki olumsuz anlamları elimine ederek ona güçlü, sağlıklı, dayanıklı ve yaşamın zorluklarına karşı dirençli anlamlarını yüklemiştir. İlk kez 1953 yılında George Box bu sözcüğe istatistiksel bir anlam kazandırmıştır. Bilim adamları varsayımlara bağlı olamayan ve özellikle de normallik varsayımına karşı duyarsız yaklaşımları **"**güçlülük (robustness)**"** olarak adlandırmışlardır [2]. Günümüzde, normallik varsayımına körü körüne bağlı kalınmasına karşı çıkan küçük ama giderek büyüyen bir grup vardır. 1960'dan beri bu konuda çok önemli adımlar atılmıştır. Kuramsal istatistikçilerin çok azı normal dağılım doğmasından kuşkulanmakla birlikte, uygulamalı istatistikçilerin çoğu bu konuda önemli şüphelere sahiptir. İşin doğrusu, kuramsal modellerin çoğuna gerçekte ender olarak rastlanılmaktadır [3]. Bu nedenle de, varsayımlara bağlı olmayan güçlü tahminciler önerilmektedir.

Bilindiği gibi merkezi eğilim ölçüleri bir serideki terimlerin hangi değer etrafında toplandığı konusunda bilgi vermektedirler. Bu bilgi verilerin konumu ile ilgilidir. Bu doğrultuda bir kitlede merkezi eğilimin ölçüsü konum parametresidir [4]. Konum parametreleri içinde en bilineni ve en çok kullanılanı aritmetik ortalamadır. Örneklem verilerinden hareketle, kitle parametrelerinin tahmini söz konusu olduğunda ise, aritmetik ortalama yine en popüler konum tahmin edicisi olmaktadır. Ancak, seride aykırı bir gözlemin bulunması aritmetik ortalamayı önemli ölçüde etkilemekte ve kullanımını tehlikeye sokmaktadır [5]. Aritmetik ortalamanın bozulma noktası 'dir (Bozulma noktası; konum yada ölçek tahmin edicilerinin dayanıklı olmayan sonuçlar vermesine neden olan gözlem sayısının oranı olarak tanımlanabilir) [6]. Bir başka deyişle, n hacimlik bir örneklem de tek bir aykırı gözlemin bile bulunması aritmetik ortalamayı önemli ölçüde etkilemeye yetecektir. Bu nedenle, aritmetik ortalamanın hem konum tahmin edicisi hem de konum parametresi olarak çok dayanıklı olduğunu söylemek zordur. Buna karşılık dayanıklı konum tahmin edicileri olarak anılan medyan, budanmış ortalama (trimmed mean), "Winsorise" edilmiş ortalama (Winsorised mean), Hodges-Lehman ve M- tahmin edicileri bu dezavantaja sahip değildirler. Normal dağılımdan uzaklaşıldığı ve gözlemlerin aykırı değer içerdiği durumlarda aritmetik ortalamaya göre daha sağlıklı sonuçlar verebilmektedirler.

Gerçek veriler ender durumlarda normal dağılıma sahip olurlar ve hatta aykırı değerleri de sıkça ihtiva edebilirler. Bu açıdan normal dağılım modeli yeterince esnek değildir. En iyimser durumda, güvenilmeyen bir modelle en iyi metotları bulmakta ısrarcı olmak uygun bir yaklaşım olmaz. Bizim hedefimiz bundan sonra konum modelini pratikte karşılaşılan durumlar için daha gerçekçi olacak bir şekilde değiştirmek olacaktır. Verilerin dağılımını kendine özgü bir dağılıma sınırlamaktan öte modelimizi, bir anlamda normal dağılıma kapalı diğer simetrik, ağır kuyruklu dağılımlar üzerinden tasarlayacağız. Değiştirilmiş konum modeli (the altered location model),

$$y_i = \theta + \varepsilon_i$$

şeklindedir [7, 8, 11].

Normal dağılım teorisinin aksine, burada hata terimleri ε_i' lerin bağımsız oldukları ve aynı dağılımlı "*simetrik bir ağır kuyruklu*" dağılımdan geldikleri varsayılacaktır. Simetrik ağır kuyruklu dağılımlar ailesi oldukça geniş bir ailedir.

t dağılım ailesini de içeren ağır kuyruklu dağılımlar normal dağılımın aksine dağılımın kuyruklarında daha fazla yoğunluğa sahiptirler. Böylece, ağır kuyruklu terimi dağılımın kuyruk davranışını açıklamaktadır. Son derece ağır kuyruklu bir dağılım 1 serbestlik dereceli t dağılımıdır ve Cauchy dağılımı olarak adlandırılmaktadır [8].

Ağır kuyruklu dağılımlar ailesinin bir diğer üyesi de ε-bozulmuş (ε-contaminated) normal dağılımlardır [8]. Bu ailenin üyeleri CN ile gösterilir ve

$$CN(x;\varepsilon) = (1-\varepsilon).N(0,1) + \varepsilon.h(0) \qquad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada h(x), simetrik bir dağılımı göstermektedir. Rasgele değişken x, (1-ε) olasılığıyla N (0, 1) dağılımından ve ε olasılığıyla da h(x)' den gelir. h(x) fonksiyonu yerine $N(0, \sigma^2)$ alınırsa, bozulmuş normal dağılıma ulaşılmış olunur:

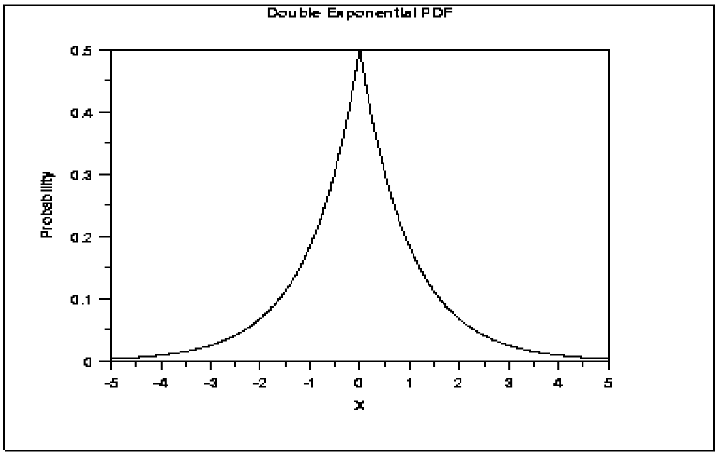
$$CN(x;\varepsilon,\sigma^2) = (1-\varepsilon).N(0,1) + \varepsilon.N(0, \sigma^2) \qquad (2.2)$$

Burada, $\sigma^2 > 1$ dir. ε, bozulma miktarını (amount of contamination) ve σ bozulmanın büyüklüğünü (size of contamination) göstermektedir. Bozulmuş normal dağılımlar, değiştirilmiş konum modelindeki aykırı değerleri temsil etmek ve değişik tahmin edicilerin etkinliklerini sınamak için kullanışlı bir ailedir. ε ve σ'nın farklı değerleri için bilgisayar simulasyonları yaratılabilir. Orta seviyede bozulmuş (mild contaminated) bir normal dağılım için, ε : %1 - %5 ve σ : 2-5 aralıkları seçilebilir. Diğer taraftan, çok bozulmuş (severe contaminated) bir normal dağılım için, σ: %10 - %25 ve σ : 10–20 değerleri kullanılabilir [8, 9].

Ağır kuyruklu dağılımların bir diğer üyesi Laplace (double exponential) dağılımıdır. Laplace dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{e^{-\left|\frac{x-\mu}{\beta}\right|}}{2.\beta}, \quad \beta > 0$$

şeklindedir. Burada konum parametresi μ ve ölçek parametresi β'dır. Dağılımın yoğunluk fonksiyonu Şekil (2.1)' den de görüleceği gibi oldukça ağır kuyrukludur.



Şekil 2.1. *"Laplace (0,1)" Dağılımının Yoğunluk Fonksiyonunun Grafiği*

Ağır kuyruklu dağılımları üretecek bir üreteç Tukey tarafından "*normal / bağımsız*" (normal / independent) dağılımlar ailesi adıyla

$$Z = \frac{x}{y}$$

şeklinde tanıtılmıştır [10]. Burada x, standart normal dağılıma sahip bir rasgele değişken ve y ise x' ten bağımsız bir rasgele değişkeni göstermektedir. Örneğin, t dağılımları bu ailenin bir üyesidir. Eğer, y'nin dağılımı Uniform (0, 1) alınırsa, "slash" (kesen) dağılımına ulaşılır. Slash dağılımı merkez bölgesinde N(0,1)'e ve kuyruklarda Cauchy dağılımına benzeyen ağır kuyruklu bir dağılımdır.

3. HATA KARELER ORTALAMASI KAVRAMI

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yoğunluk fonksiyonu $f(x/\theta)$ (θ, bilinmeyen parametre) dağılımından alınan rasgele bir örneklem olsun. Verilerdeki mevcut bilgileri bilinmeyen q hakkında tahmin yapmak için kullanmak isteyelim. Eğer, veriler mevcut bilgilerimizin kaynağını oluşturuyorsa θ'yı x'lerin bir fonksiyonu olan $\delta(x)$ ile tahmin edebiliriz. Burada $\delta(x)$, *tahmin edici* olarak adlandırılmaktadır. Hata kareler ortalaması (mean square error),

$$MSE(\theta) = E\left((\delta(x) - \theta)^2\right) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. MSE'yi iki parçaya ayırabiliriz. Eşitlik (3.1)'deki parantezin içerisine "$\mu\delta = E(\delta(x))$" terimi eklenip çıkarılarak bu işlem aşağıdaki şekilde gerçekleştirilir:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(\theta) &= \mathrm{E}_\theta\left((\delta(\mathrm{x})-\theta)^2\right) = \mathrm{E}_\theta\left((\delta(\mathrm{x})-\mu_\delta+\mu_\delta-\theta)^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\left(\delta(\mathrm{x})-\mu_\delta\right)^2\right) + 2(\delta(\mathrm{x})-\mu_\delta).(\mu_\delta-\theta)+(\mu_\delta-\theta)^2\Big) \\
&= \mathrm{E}_\theta\left((\delta(\mathrm{x})-\mu_\delta)^2\right) + \mathrm{E}_\theta\left(2.(\delta(\mathrm{x})-\mu_\delta).(\mu_\delta-\theta)\right)+(\mu_\delta-\theta)^2 \\
&= \mathrm{V}_\theta\left(\delta(\mathrm{x})\right) + 2.(\mu_\delta-\theta).\mathrm{E}_\theta\left((\delta(\mathrm{x})-\mu_\delta)\right)+(\mu_\delta-\theta)^2 \\
&= \mathrm{V}_\theta\left(\delta(\mathrm{x})\right) + (\mu_\delta-\theta)^2
\end{aligned}
$$

Böylece, hata kareler ortalaması varyans ve sapma (yan) terim olarak ayrıştırılabilir. Yan terimi μ_δ-θ ile gösterilmektedir. Eğer yan terimi sıfırsa tahmin edici yansızdır. Bilinmeyen q parametresini tahmin etmek için kullanacağımız $\delta(x)$ fonksiyonuna göre Hata Kareler Ortalamasının en küçük yapılması hedeflenir. Tahminlerin bilinmeyen θ parametresine yaklaştırılması tutarlılık kavramıyla ilgilidir. Eğer örnek çapı artırılırsa, bilinmeyen θ parametresi hakkında pek çok bilgi elde edebileceğimizi görürüz ve böylece çok küçük bir MSE ile iyi bir tahmin yapabilmeyi ümit edebiliriz ($\lim_{n\to\infty} MSE(\theta) = 0$).

TEOREM 3.1: T_2 ve T_1, θ ’nın tahmin edicileri olsun. Şayet $MSE(T_2) \leq MSE(T_1)$ ise, T_2,T_1’den daha etkindir. Ayrıca, T_2’ye göre T_1’in göreceli (relative) etkinliği aşağıdaki şekilde tanımlanır [8]:

$$
EFF(T_1;T_2) = \frac{MSE(T_2)}{MSE(T_1)} = \frac{E(T_2-\theta)^2}{E(T_1-\theta)^2} \tag{3.2}
$$

4. MONTE-CARLO SİMULASYON METODU

Belirli bir F(x) birikimli dağılım fonksiyonuna ait n büyüklükteki x_1, x_2, ...,x_n rasgele örneği türetilmiş olsun. $\hat{\theta}$ tahmin edicisi hesaplansın. Bu hesaplama sürecinin tekrarlı olarak r kez devam ettiğini düşünelim. Burada r’ ye *Monte Carlo sayacı* adı verilmektedir.

r farklı durumda hesaplanan tahminlerin bir serisi aşağıdadır:

Örneklem	1	2	.	.	.	r
Tahmin	$\hat{\theta}_1$	θ_2	.	.	.	$\hat{\theta}_r$

$\hat{\theta}$ tahmin edicisinin örnekleme dağılımından $(F(\hat{\theta}))$ gelen r çaplı rasgele örneğini $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, ..., \hat{\theta}_r$ ile temsil edelim. Böylece, tahminlerin bir koleksiyonunun deneysel (empirik) dağılım fonksiyonu $F_r(\hat{\theta})$, her bir $\hat{\theta}_i$ ' ye $1/r$ büyüklüğünde ağırlık (yığılma) verecektir. Bilinmeyen dağılım fonksiyonunun $F(\hat{\theta})$ tahmin edicisi olan deneysel dağılım $F_r(\hat{\theta})$ fonksiyonu ile gösterilecektir.

Hesaplanan Monte-Carlo yinelemelerinden $\hat{\theta}$ 'nın davranışı aşağıdaki şekilde özetlenecektir;

$$\bar{\hat{\theta}} = \frac{\sum_{i=1}^{r} \hat{\theta}_i}{r} \quad \text{ve} \quad s^2(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{r} \left(\hat{\theta}_i - \bar{\hat{\theta}} \right)^2}{r-1}$$

Burada,

$\bar{\hat{\theta}}$, Monte-Carlo ortalaması,

$s^2\left(\hat{\theta}\right)$, Monte-Carlo varyansı

şeklinde ifade edilmektedir [8].

Glavenko-Cantelli [8] teoremine göre, örneklem hacmi sonsuza yaklaştığında deneysel dağılım fonksiyonu, bilinmeyen gerçek dağılım fonksiyonuna yaklaşacaktır. Aynı teoremin Monte Carlo çalışmasına uygulanmasıyla Monte Carlo yineleme sayısı olan r sonsuza yaklaştığında;

$$F_r(\hat{\theta}) \rightarrow F(\hat{\theta})$$

olacaktır. Böylece;

$$\bar{\hat{\theta}} \rightarrow E\left(\hat{\theta}\right) \quad \text{ve} \quad s^2\left(\hat{\theta}\right) \rightarrow Var\left(\hat{\theta}\right)$$

sonuçlarına yakınsanacaktır [8].

5. UYGULAMALAR

Bu bölümde, Bölüm II' de kısaca tanıtılan ε-bozulmuş normal aile üzerinde tasarlanmış bir Monte Carlo simulasyonuna yer verilecektir.

ε-bozulmuş normal aile Eşitlik (2.1)' de verilmişti. Üç tip simetrik dağılım N(0,1) olarak bilinen ve referans kabul edilen standart normal dağılımı bozmada kullanılacaktır. Sözü geçen simetrik dağılımlar sıfır ortalamalı ve varyansı birden büyük olan normal dağılım (N,(0, σ^2 >1), σ^2 > 1), bir, beş ve on serbestlik dereceli t dağılımı ve konum parametresi sıfır ve dağılma parametresi bir olan Laplace dağılımıdır. Kullanılacak simetrik dağılımların ortak özelliği konum parametrelerinin sıfır olmalarıdır.

Monte Carlo çalışmasının örneklem hacimleri n=10 (küçük hacimli örnek), 20 (orta/ılımlı hacimli örnek) ve 40 (büyük hacimli örnek) olarak belirlenmiştir. Bozulma miktarı ε için önerilen büyüklükler %10 ve %25' dir. Normal dağılımın standart sapması σ, 5 ve 10 şeklinde belirlenirken, bir serbestlik dereceli t dağılımına (Cauchy) çalışmamızda özellikle yer verilmiştir. Cauchy dağılımı oldukça ağır kuyrukludur ve sıkça aykırı değerler üretme eğilimindedir.

Karşılaştırılması düşünülen tahmin ediciler,

(1) Aritmetik Ortalama (mean),

(2) Medyan (median)

(3) %10 Budanmış Ortalama (trimmed mean)

şeklindedir.

Önerilen değişik ağır kuyruklu dağılım senaryoları altında ilgili tahmin ediciler r=1000 farklı örnek durumu için tekrar tekrar hesaplanmıştır (örneklem verileri Minitab 13.0 programında yazılan makrolar yardımıyla üretilmiştir).

Karşılaştırma kriteri olarak Eşitlik (3.2)'de verilen ve hata kareler ortalamasına dayalı göreli etkinlik tahmin edicisi kullanılmıştır. Ayrıca, normal dağılıma uygunluğun testinde Anderson-Darling test istatistiğinden (A-Squared) faydalanılmıştır (Anderson-Darling istatistiği, normal olasılık grafiklerinde (Normal Probability Plot) noktaların referans kabul edilen doğruya yakınlıklarının bir ölçüsüdür. İstatistiğin değeri ne kadar küçük çıkarsa dağılım o kadar normale yakındır şeklinde kabaca yorumlanabilir).

Monte-Carlo deney sonuçları Tablo (5.1) , Tablo (5.2) ve Tablo (5.3)' den gözlenmektedir. Tablolarda, her bir tahmin edicinin 1000 farklı örnek durumundaki hesaplanan değerlerinin ortalamaları ve standart sapmaları görülmektedir. Ayrıca, EFF1, aritmetik ortalamanın medyana karşı etkinliğini, EFF2, aritmetik ortalamanın % 10 budanmış ortalamaya karşı etkinliğini ve EFF3, medyanın % 10 budanmış ortalamaya karşı etkinliğini göstermektedir. Tablolarda, Anderson-Darling istatistiklerinin üzerlerine konulan tek yıldız α=0.05 düzeyinde anlamlılığı ve çift yıldız ise 0.01 düzeyinde anlamlılığı göstermektedir. Burada "anlamlılık", normal dağılımdan sapma belirtisi olarak algılanmaktadır.

Tablo (5.1)' deki etkinlik değerleri mukayese edildiğinde bütün dağılımlarda medyan'nın ve % 10 budanmış ortalamanın x'in aritmetik ortalamasından daha etkin olduğunu başka bir deyişle daha dayanıklı tahmin ediciler olduklarını göstermektedir.

n = 20, CN (x;0.10,25) ve n= 40, CN(x;0.10,25) dağılımları haricindeki tüm dağılımlarda ise medyan, % 10 budanmış ortalamadan daha iyi bir yaklaşıklık gösterir.

Genel performansa bakıldığında, Tablo (5.1)'in etkinlik karşılaştırma sonucu, konum parametresi θ' nın en iyi tahmin edicisi olarak medyanı göstermektedir. Tahmin edicileri en etkininden en az etkinine göre sıralarsak karşımıza medyan, % 10 budanmış ortalama ve aritmetik ortalama sıralaması çıkacaktır. Görüldüğü gibi, aritmetik ortalamanın etkinliği, bozulmuş normal dağılım senaryoları altında diğer tahmin edicilere kıyasla daha zayıftır.

Anderson-Darling istatistikleri aritmetik ortalama tahmin edicisinin örnekleme dağılımının büyük hacimli örneklerde ($n \geq 20$) giderek normale yaklaşacağını göstermektedir. Bu sonuç merkezi limit teoremi ile tutarlıdır. Medyan'da ise örnekleme dağılımlarının normale çok yakın olduğu göze çarpmaktadır. Diğer taraftan % 10 budanmış ortalamanın örnekleme dağılımları $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ ve düzeyinde normal dağılımdan uzaktır.

Tahmin edicilerin 1000 farklı örnekteki hesaplanan sonuçlarının ortalaması örneklem hacmi büyüdükçe konum parametresinin gerçek değeri olan sıfıra ($\theta = 0$) yaklaşmaktadır ve standart sapmalar giderek küçültmektedir.

Tablo (5.2)' deki etkinlik rakamlarını yorumlamak oldukça zor ve karmaşıktır. Çünkü, değişik dağılım senaryolarında değişik tahmin ediciler etkinlik yarışını kazanabilmektedirler.

Bir serbestlik dereceli t dağılımı Cauchy olarak bilinmektedir ve diğerlerinden ayrı olarak yorumlanmasında faydalar vardır. Cauchy ile 0.25 bozulmuş standart normal dağılımda, medyan ve % 10 budanmış ortalamanın, aritmetik ortalamaya göre çok etkin oldukları gözlenmektedir. Diğer taraftan medyan, % 10 budanmış ortalamaya göre daha etkindir. En etkinden en az etkine göre sıralama;

Medyan, % 10 Budanmış Ortalama, Aritmetik Ortalama

şeklindedir.

Cauchy ile 0.10 bozulmuş standart normal dağılımda, medyan ve %10 budanmış ortalama, aritmetik ortalamadan daha etkindir. Diğer taraftan, %10 budanmış ortalamanın medyandan etkin olduğu gözlenmektedir.

Tablo 5.1. *N (0,σ^2) ile bozulan, bozulmuş normal dağılım ailesinde üç konum tahmin edicisinin etkinlik karşılaştırılması*

n=10	ε	σ	***ORTALAMA (Ortalama)***	***ST.SAPMA (Ortalama)***	***Anderson-Darling Norm. Testi A-Squared***	***ORTALAMA (Medyan)***	***ST.SAPMA (Medyan)***	***Anderson-Darling Norm. Testi A-Squared***	***ORTALAMA (Bud.Ort.)***	***ST.SAPMA (Bud.Ort.)***	***Anderson-Darling Norm. Testi A-Squared***	***EFF1***	***EFF2***	***EFF3***
N(0,1)	0.25	5	-0, 0833	0, 8581	2, 51**	-0, 037	0, 4928	0, 482	-0, 0526	0, 6452	4, 559**	3, 0435	1, 7737	0, 5828
		10	0, 0602	1, 5856	2, 438**	0, 0133	0, 521	1, 006*	0, 0326	1, 0318	15, 991**	9, 2695	2, 3626	0, 2549
&	0.10	5	0, 0101	0, 5947	2, 514**	0, 0125	0, 4028	0, 621	0, 0112	0, 4143	0, 875*	2, 1783	2, 0596	0, 9455
N(0,σ^2)		10	-0, 0573	1, 098	10, 411**	0, 0084	0, 4157	0, 427	-0, 0171	0, 5871	17, 042**	6, 9928	3, 5042	0, 5011
n=20	ε	σ	***ORTALAMA (Ortalama)***	***ST.SAPMA (Ortalama)***	***A-Squared***	***ORTALAMA (Medyan)***	***ST.SAPMA (Medyan)***	***A-Squared***	***ORTALAMA (Bud.Ort.)***	***ST.SAPMA (Bud.Ort.)***	***A-Squared***	***EFF1***	***EFF2***	***EFF3***
N(0,1)	0.25	5	-0, 0024	0, 5694	0, 673	-0, 0002	0, 3473	0, 512	0, 0019	0, 4669	1, 03**	2, 6880	1, 4873	0, 5533
		10	-0, 0052	1, 1874	0, 493	-0, 009	0, 3688	0, 421	0, 0012	0, 903	3, 427**	10, 3601	1, 7291	0, 1669
&	0.10	5	0, 0141	0, 412	1, 133**	0, 00135	0, 2987	0, 237	0, 0110	0, 2975	1, 221**	1, 9047	1, 9179	1, 0069
N(0,σ^2)		10	-0, 0465	0, 7408	4, 021**	0, 00494	0, 2987	0, 406	-0, 0203	0, 443	7, 187**	6, 1750	2, 8015	0, 4537
n=40	ε	σ	***ORTALAMA (Ortalama)***	***ST.SAPMA (Ortalama)***	***A-Squared***	***ORTALAMA (Medyan)***	***ST.SAPMA (Medyan)***	***A-Squared***	***ORTALAMA (Bud.Ort.)***	***ST.SAPMA (Bud.Ort.)***	***A-Squared***	***EFF1***	***EFF2***	***EFF3***
N(0,1)	0.25	5	0, 0085	0, 3934	0, 704	0, 0075	0, 2376	0, 479	0, 0005	0, 3178	1, 096**	2, 7398	1, 5331	0, 5596
		10	-0, 0033	0, 8145	0, 519	0, 0025	0, 2505	0, 162	0, 0016	0, 6046	2, 156**	10, 5705	1, 8149	0, 1717
&	0.10	5	-0, 0081	0, 3071	0, 573	-0, 0046	0, 2209	0, 18	-0, 0042	0, 2128	0, 842*	1, 9330	2, 0844	1, 0783
N(0,σ^2)		10	-0, 016	0, 5121	1, 124**	-0, 0030	0, 2065	0, 241	-0, 0098	0, 2640	3, 872**	6, 1534	3, 7623	0, 6114

Tablo 5.2. *t_v ile bozulan, bozulmuş normal dağılım ailesinde üç konum tahmin edicisinin etkinlik karşılaştırması*

n=10	ε	v	ORTALAMA (Ortalama)	ST.SAPMA (Ortalama)	A-Squared	ORTALAMA (Medyan)	ST.SAPMA (Medyan)	A-Squared	ORTALAMA (Bud.Ort.)	ST.SAPMA (Bud.Ort.)	A-Squared	EFF1	EFF2	EFF3
N(0,1) & t_v	0.25	1	0, 082	5, 066	233, 003**	0, 002	0, 4082	0, 274	-0, 0072	0, 4562	4, 106**	154, 0592	123, 3177	0, 8005
		5	-0, 0158	0, 3468	0, 933*	-0, 0233	0, 3713	0, 248	-0, 0159	0, 3346	0, 939*	0, 8708	1, 0741	1, 2335
		10	0, 0106	0, 3181	0, 375	0, 0168	0, 3689	0, 22	0, 0111	0, 3281	0, 611	0, 7428	0, 9399	1, 2653
	0.10	1	0, 0006	2, 4435	217, 253**	0, 0112	0, 4056	0, 192	0, 0032	0, 3708	0, 329	36, 2658	43, 4223	1, 1973
		5	-0, 0081	0, 3195	0, 17	-0, 006	0, 3747	0, 264	-0, 0081	0, 3251	0, 268	0, 7273	0, 9659	1, 3279
		10	-0, 0085	0, 3181	0, 198	-0, 0069	0, 3597	0, 362	-0, 0049	0, 3179	0, 267	0, 7823	1, 0017	1, 2804
n=20	ε	v	ORTALAMA (Ortalama)	ST.SAPMA (Ortalama)	A-Squared	ORTALAMA (Medyan)	ST.SAPMA (Medyan)	A-Squared	ORTALAMA (Bud.Ort.)	ST.SAPMA (Bud.Ort.)	A-Squared	EFF1	EFF2	EFF3
N(0,1) & t_v	0.25	1	0, 43	38, 82	349, 672**	-0, 0131	0, 3016	0, 486	-0, 0183	0, 4123	18, 36**	16540, 3363	8848, 7706	0, 5350
		5	-0, 0009	0, 2497	0, 628	-0, 0057	0, 2707	0, 307	-0, 0002	0, 2402	0, 697	0, 8503	1, 0811	1, 2714
		10	-0, 0135	0, 2262	0, 328	-0, 0092	0, 2718	1, 27**	-0, 0132	0, 2247	0, 397	0, 6944	1, 0140	1, 4603
	0.10	1	0, 0487	1, 1238	140, 916**	0, 0072	0, 2646	0, 354	0, 0083	0, 2438	0, 654	18, 0535	21, 2715	1, 1783
		5	0, 0119	0, 2293	0, 651	0, 0041	0, 2755	0, 538	0, 0086	0, 2268	0, 563	0, 6949	1, 0234	1, 4727
		10	0, 004	0, 2272	0, 323	0, 0075	0, 2721	0, 322	0, 0045	0, 2271	0, 317	0, 6971	1, 0008	1, 4356
n=40	ε	v	ORTALAMA (Ortalama)	ST.SAPMA (Ortalama)	A-Squared	ORTALAMA (Medyan)	ST.SAPMA (Medyan)	A-Squared	ORTALAMA (Bud.Ort.)	ST.SAPMA (Bud.Ort.)	A-Squared	EFF1	EFF2	EFF3
N(0,1) & t_v	0.25	1	-0, 275	10, 721	291, 587**	0, 0017	0, 1978	0, 188	-0, 0024	0, 2182	1, 545**	2939, 7946	2416, 5431	0, 8220
		5	-0, 0051	0, 1649	0, 287	0, 0054	0, 1915	0, 256	-0, 0029	0, 1624	0, 229	0, 7418	1, 0320	1, 3913
		10	0, 0106	0, 1690	0, 394	0, 0099	0, 2012	0, 264	0, 0092	0, 1698	0, 43	0, 7066	0, 9914	1, 4030
	0.10	1	-0, 133	3, 881	281, 863**	-0, 0004	0, 1969	0, 187	-0, 0048	0, 1700	0, 501	389, 0772	521, 6781	1, 3408
		5	0, 0003	0, 1662	0, 654	0, 0026	0, 2002	0, 535	0, 0020	0, 1644	0, 917*	0, 6892	1, 0221	1, 4831
		10	-0, 0015	0, 1589	0, 261	-0, 0021	0, 1949	0, 132	-0, 0021	0, 1603	0, 544	0, 6643	0, 9818	1, 4780

Cauchy ile bozulmuş standart normal dağılımda Anderson-Darling istatistikleri aritmetik ortalamanın normalden çok uzak olduğunu göstermektedir. Benzer durum genel olarak %10 budanmış ortalamanın örnekleme dağılımı içinde geçerlidir. Ancak, medyan tahmin edicisinin örnekleme dağılımları Anderson-Darling sonuçlarına göre normallik göstermektedir.

Cauchy ile bozulmuş standart normal dağılımda genel olarak, 1000 örnekten hesaplanan ve ortalama ve standart sapmaları bulunan aritmetik ortalamanın referans kabul edilen $\theta = 0$ konum değerinden diğer tahmin edicilere kıyasla uzakta tahminler yaptığı ve standart sapmaların çok büyük çıktığı dikkatimizi çekmektedir. Serbestlik derecesi ve örneklem hacimleri arttığında aritmetik ortalamanın kendisini toparladığı ve daha iyi tahminler üretmeye başladığı gözlenmektedir. Bu durum Merkezi Limit Teoremi ve büyük hacimli t' lerin normale yaklaşmasıyla örtüşmektedir.

Diğer serbestlik derecelerindeki (t_5 ve t_{10}) yorumlar ise; aritmetik ortalamanın medyandan iyi olduğu, genel performansa bakıldığında %10 budanmış ortalamanın aritmetik ortalamadan daha iyi ve son olarak da %10 budanmış ortalamanın medyandan daha iyi olduğu gözlenmektedir. Etkinlik sıralaması en etkinden en az etkine doğru,

%10 Budanmış Ortalama, Aritmetik Ortalama, Medyan

şeklinde olacaktır.

Tablo (5.3)' ün etkinlik karşılaştırması en iyi tahmin edici olarak %10 budanmış ortalamayı göstermektedir. En etkin tahmin ediciden en az etkin tahmin ediciye doğru bir sıralama yapıldığında karşımıza;

%10 Budanmış Ortalama, Aritmetik Ortalama, Medyan

çıkmaktadır.

Görüldüğü gibi Tablo (5.1)' in aksine, Laplace dağılımı ile yapılan bozulma medyanı en az etkin tahmin edici konumuna düşürmektedir. Anderson-Darling istatistikleri bütün tahmin edicilerin örnekleme dağılımlarını normal olarak göstermektedir. Tahmin edicilerin 1000 farklı örnekteki hesaplanan sonuçlarının standart sapmaları örneklem hacmi büyüdükçe giderek azalmaktadır.

Tablo 5.3. *Laplace (0,1) ile bozulan, bozulmuş normal dağılım ailesinde üç konum tahmin edicisinin etkinlik karşılaştırması*

	n=10	ε	***ORTALAMA (Ortalama)***	***ST.SAPMA (Ortalama)***	***A-Squared***	***ORTALAMA (Medyan)***	***ST.SAPMA (Medyan)***	***A-Squared***	***ORTALAMA (Bud.Ort.)***	***ST.SAPMA (Bud.Ort.)***	***A-Squared***	***EFF1***	***EFF2***	***EFF3***
N(0, 1) Laplace(0, 1)		0.25	0, 0119	0, 3639	0, 426	0, 0038	0, 3834	0, 265	0, 0119	0, 3493	0, 364	0, 9017	1, 0852	1, 2035
		0.10	0, 0145	0, 3424	0, 376	0, 0164	0, 3777	0, 186	0, 0134	0, 3389	0, 241	0, 8217	1, 0210	1, 2425
	n=20	ε	***ORTALAMA (Ortalama)***	***ST.SAPMA (Ortalama)***	***A-Squared***	***ORTALAMA (Medyan)***	***ST.SAPMA (Medyan)***	***A-Squared***	***ORTALAMA (Bud.Ort.)***	***ST.SAPMA (Bud.Ort.)***	***A-Squared***	***EFF1***	***EFF2***	***EFF3***
N(0, 1) Laplace(0, 1)		0.25	0, 0109	0, 2381	0, 523	0, 0097	0, 2534	0, 231	0, 0106	0, 2262	0, 255	0, 8835	1, 1073	1, 2533
		0.10	0, 0055	0, 2336	0, 434	0, 0067	0, 2682	0, 364	0, 0062	0, 2306	0, 436	0, 7588	1, 0256	1, 3516
	n=40	ε	***ORTALAMA (Ortalama)***	***ST.SAPMA (Ortalama)***	***A-Squared***	***ORTALAMA (Medyan)***	***ST.SAPMA (Medyan)***	***A-Squared***	***ORTALAMA (Bud.Ort.)***	***ST.SAPMA (Bud.Ort.)***	***A-Squared***	***EFF1***	***EFF2***	***EFF3***
N(0, 1) Laplace(0, 1)		0.25	0, 0034	0, 1704	0, 411	0, 0038	0, 1855	0, 219	0, 0021	0, 1651	0, 342	0, 8440	1, 0656	1, 2626
		0.10	0, 0053	0, 1672	0, 252	-0, 0018	0, 1925	0, 258	0, 0045	0, 1656	0, 35	0, 7552	1, 0203	1, 3511

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Ağır kuyruklu dağılımlar ailesine mensup bazı dağılımlar ele alınmış ve tasarlanan Monte Carlo simulasyonu ile klasik konum tahmin edicilerinin etkinlikleri, örnekleme dağılımları ve diğer bazı özellikleri hakkında yorumlara ulaşılmıştır. Çalışmanın gelecekte diğer ağır kuyruklu dağılımlara da uygulanması mümkündür. Monte Carlo simulasyonu analitik yoldan karşılaştırılması güç veya zor olan tahmin edicilerin konum özelliklerini iyi bir şekilde ortaya koyabilecek araçlardandır. Bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere bağlı olarak simulasyon sonuçlarına hızlı ve daha güvenilir bir şekilde ulaşılacaktır. Burada dikkat edilmesi gereken bir husus, bilgisayar programı yazımı sırasında titiz davranılmalı ve mantıksal hatalara karşı duyarlı olunmalıdır. Aksi halde sonuçlar çok yanıltıcı olabilecektir.

KAYNAKLAR

[1] Seber, G. A.F. (1984). Multivariate Observations, John Wiley and Sons, 686pp.

[2] Stigler, S. M. (1973). "Simon Newcomb, Percy Daniell and the History of Robust Estimation, 1885-1920", JASA, Vol. 68, 872-879.

[3] Hogg, R. W. (1974). "Adaptive Robust Procedure: A Partial Review and Some Suggestions for Future Applications and Theory" , JASA, Vol. 69, 909-923.

[4] Aytaç, M. (1991). Uygulamalı Parametrik Olmayan İstatistik Testleri, Uludağ Üniversitesi Basımevi, Bursa.

[5] Serper, Ö. (2000). Uygulamalı İstatistik I, Genişletilmiş 4. Baskı, Ezgi Kitabevi, Bursa.

[6] Harrison M. W. (1990). Handbook of Statistical Methods for Engineers and Scientists, McGraw-Hill Pub. Co., New York.

[7] Crow, E. L. , and Siddiqui, M.M. (1967). "Robust Estimation of Location" , JASA, Vol. 62, 353-389.

[8] Birch, J. B. (1995). Exploratory and Robust Data Analysis Using Minitab, Virginia Tech. Publications.

[9] Hogg, R. W. (1972). "More Light on the Kurtosis and Related Statistics" , JASA, Vol. 67, 422-424.

[10] Tukey, J. W. (1962). "The Future of Data Analysis", Ann. Mat. Statist. Vol. 33.

[11] Andrews, D.R., Bickel, P.J., Hampel, F.R., Huber, P.J., Rogers, W.H., and Tukey, J.W. (1972). Robust Estimates of Location: Survey and Advances, Princeton University Press, New Jersey.