Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B - Teorik Bilimler
Anadolu University Journal of Science and Technology B- Theoritical Sciences

2017 - Cilt: 5 Sayı: 2
Sayfa: 148 - 160
DOI: 10.20290/aubtdb.329127
Geliş: 18 Temmuz 2017 Düzeltme: 23 Eylül 2017 Kabul: 03 Ekim 2017

TOPOLOJİK UZAYLARDA HEMEN HEMEN e-SÜREKLİLİK ÜZERİNE

Murad ÖZKOÇ *

Matematik Bölümü, Fen Fakültesi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, 48000, Menteşe, Muğla, Türkiye

ÖZET

Bu çalışmanın esas amacı, Ekici tarafından tanımlanan hemen hemen e-sürekli fonksiyonların karakterizasyonlarını araştırmak ve bu kavrama ilişkin bazı temel özellikler elde etmektir. Ayrıca hemen hemen e-süreklilik kavramının sadece bazı temel özellikleri değil aynı zamanda literatürde bulunan diğer birçok fonksiyon tipleri ile aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Dahası bu kavram ile ayırma aksiyomları arasındaki bazı temel özellikler de araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: e-açık, Hemen hemen e-süreklilik, e-süreklilik, Zayıf e-süreklilik, Hafif e-süreklilik

ON ALMOST e-CONTINUITY IN TOPOLOGICAL SPACES

ABSTRACT

The main purpose of this study is to investigate the characterizations of almost e-continuous functions defined by Ekici and to obtain some fundamental properties related to this concept. In addition, we investigate not only some of its fundamental properties but also its relations with other types of already existing topological functions. Moreover, we look into some basic properties between this notion and separation axioms.

Keywords: e-open, Almost e-continuity, e-continuity, Weakly e-continuity, Faint e-continuity

1. GİRİŞ

Matematiğin bir dalı olan topoloji, genellikle sürekliliğe dair problemlerle ilgilenir. Süreklilik kavramı matematiğin çeşitli alanlarında önemli bir yere sahiptir. Bu yüzden süreklilik kavramının genellemeleri, topoloji alanındaki en önemli konulardan biridir. Son yıllarda birçok matematikçi açık kümelerin genelleştirilmiş formları yardımıyla bu kavramın yeni farklı türlerini tanıtmış ve çalışmıştır. Açık küme kavramının bir genelleştirmesi olan e-açık küme kavramı 2008 yılında Ekici [1] tarafından tanıtılmış ve gerek bu kavram yardımıyla gerekse literatürde bulunan diğer bazı kavramlar yardımıyla tanımlanan bazı süreklilik çeşitleri [2-12] nolu makalelerde çalışılmıştır. 1968 yılında Singal and Singal [13] süreklilik kavramının zayıf bir türü olan hemen hemen sürekli fonksiyon kavramını ele almıştır. Munshi and Bassan [14] ise 1981 yılında hemen hemen yarısürekli fonksiyon kavramı üzerinde çeşitli çalışmalar yapmıştır. 1988 yılında Noiri [15] tarafından hemen hemen α-sürekli fonksiyon, 1990 yılında Popa [16] tarafından hemen hemen A-sürekli fonksiyon, 1997 yılında Nasef and Noiri [17] tarafından hemen hemen önsürekli fonksiyon ve hemen hemen β-sürekli fonksiyon kavramları tanıtılmış ve bu kavramlara dair birçok sonuçlar elde edilmiştir. 2009 yılına gelindiğinde ise Keskin and Noiri [18] hemen hemen b-sürekli fonksiyon tanımını vermiş ve hemen hemen b-süreklilik kavramının literatürde yer alan diğer bazıları arasındaki ilişkiyi ortaya koyan birtakım sonuçlar elde etmiştir.

Bu çalışmanın esas amacı, Ekici tarafından tanımlanan hemen hemen e-sürekli fonksiyon kavramına ilişkin bazı karakterizasyonlar ve temel özellikler elde etmektir. Ayrıca bu kavram ile literatürde yer alan bazı süreklilik çeşitleri arasındaki ilişkiler araştırılacaktır. Üstelik hemen hemen e-sürekli fonksiyon kavramının ayırma aksiyomları ile ilgili bazı temel özellikleri de incelenecektir. Son olarak

*Sorumlu yazar: murad.ozkoc@mu.edu.tr

çalışmanın genelinde -kavramlar hariç- Matematiğin Evrensel Sembolik Dili'nin kullanılmasına özen gösterilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu çalışmada baştan sona (X,τ) ve (Y,σ) (ya da kısaca X ve Y) -aksi belirtilmedikçe- hiçbir ayırma aksiyomunu sağlamayan boştan farklı topolojik uzayları temsil edecektir. Bir X topolojik uzayının bir A altkümesinin içi ve kapanışı sırasıyla $int(A)$ ve $cl(A)$ ile gösterilecektir. Bir topolojik uzaya ait bir x noktasının açık komşuluklar ve komşuluklar ailesi sırasıyla $\mathcal{U}(x)$ ve $\mathcal{N}(x)$ ile gösterilecektir. Bir topolojik uzayda kapanışının içi kendisine eşit olan kümelere regüler açık [19] ve içinin kapanışına eşit olan kümelere de regüler kapalı küme [19] denir. Yine bir topolojik uzayda bir A kümesinin δ-içi [20], A kümesinin bu uzayda kapsadığı regüler açıkların birleşimi şeklinde tanımlanır ve $int_\delta(A)$ ile gösterilir. Uzayın bir x noktasını içeren her açık U kümesinin kapanışının içi ile A kümesinin arakesiti boştan farklı ise bu x noktasına A kümesinin bir δ-değme noktası [20]; tüm δ-değme noktalarının oluşturduğu kümeye de A kümesinin δ-kapanışı [20] denir ve $cl_\delta(A)$ ile gösterilir. Benzer şekilde uzayın bir x noktasını içeren her açık U kümesinin kapanışı ile A kümesinin arakesiti boştan farklı ise bu x noktasına A kümesinin bir θ-değme noktası [21]; tüm θ-değme noktalarının oluşturduğu kümeye de A kümesinin θ-kapanışı [21] denir ve $cl_\theta(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1. (X,τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere
(a) A, θ-açık [21]:$\Leftrightarrow A = int_\theta(A) \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists U \in \mathcal{U}(x))(cl(U) \subseteq A)$,
(b) A, δ-açık [20]:$\Leftrightarrow A = int_\delta(A) \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists U \in \mathcal{U}(x))(int(cl(U)) \subseteq A)$,
(c) A-küme [22]:$\Leftrightarrow (\exists U \in \tau)(\exists F \in RC(X))(A = U \cap F)$,
(d) A, α-açık [23]:$\Leftrightarrow A \subseteq int(cl(int(A)))$,
(e) A, yarıaçık [24]:$\Leftrightarrow A \subseteq cl(int(A))$,
(f) A, önaçık [25]:$\Leftrightarrow A \subseteq int(cl(A))$,
(g) A, e-açık [1]:$\Leftrightarrow A \subseteq cl(int_\delta(A)) \cup int(cl_\delta(A))$,
(h) A, b-açık [26](γ-açık [27] veya sp-açık [28]) :$\Leftrightarrow A \subseteq int(cl(A)) \cup cl(int(A))$,
(i) A, β-açık [29](veya yarıönaçık [30]) :$\Leftrightarrow A \subseteq cl(int(cl(A)))$.

δ-açık [20] (sırasıyla θ-açık [21], α-açık [23], yarıaçık [24], önaçık [25], e-açık [1], b-açık [26], β-açık [29]) kümenin tümleyenine δ-kapalı [20] (sırasıyla θ-kapalı [21], α-kapalı [23], yarıkapalı [24], önkapalı [25], e-kapalı [1], b-kapalı [26], β-kapalı [29]) küme denir. Bir X uzayının tüm regüler açık [19] (sırasıyla θ-açık [21], δ-açık [20], α-açık [23], yarıaçık [24], önaçık [25], e-açık [1], b-açık [26], β-açık [29]) kümeleri ve A-kümeleri [22] $RO(X)$ (sırasıyla $\theta O(X)$, $\delta O(X)$, $\alpha O(X)$, $SO(X)$, $PO(X)$, $eO(X)$, $BO(X)$, $\beta O(X)$) ve $A(X)$ ile gösterilir. Benzer şekilde uzayın tüm regüler kapalı [19] (sırasıyla kapalı, δ-kapalı [20], e-kapalı [1]) kümelerin ailesi, $RC(X)$ (sırasıyla $C(X)$, $\delta C(X)$, $eC(X)$) ile gösterilir. Uzayın belirli bir x noktasını içeren tüm açık (sırasıyla regüler açık [19], θ-açık [21], e-açık [1]) kümelerin ailesi ise $\mathcal{U}(X,x)$ (sırasıyla $RO(X,x)$, $\theta O(X,x)$, $eO(X,x)$) ile gösterilir. Bir topolojik uzayın bir A altkümesinin e-içi [1] A kümesinin kapsadığı e-açık kümelerin birleşimi şeklinde tanımlanır ve $e\text{-}int(A)$ ile gösterilir. Yine bir topolojik uzayın bir A altkümesinin e-kapanışı ise [1] (sırasıyla yarıkapanışı [24]) A kümesini kapsayan e-kapalı [1] (sırasıyla yarıkapalı [24]) kümelerin kesişimi şeklinde tanımlanır ve $e\text{-}cl(A)$ (sırasıyla $scl(A)$) ile gösterilir.

Tanım 2.2. $(X,\tau), (Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere
(a) f, δ-sürekli (kısaca $\delta.s.$) [31]:$\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\forall V \in \mathcal{U}(f(x)))(\exists U \in \mathcal{U}(x))(f[int(cl(U))] \subseteq int(cl(V)))$;
(b) f, e-sürekli (kısaca $e.s.$) [1]:$\Leftrightarrow (\forall V \in \sigma)(f^{-1}[V] \in eO(X))$;
(c) f, e-kararsız (kısaca $e.k.$) [2]:$\Leftrightarrow (\forall V \in eO(Y))(f^{-1}[V] \in eO(X))$;
(d) f, güçlü θ-e-sürekli (kısaca $g.\theta.e.$s.) [12]:$\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\forall V \in \mathcal{U}(f(x)))(\exists U \in eO(X,x))(f[e\text{-}cl(U)] \subseteq V)$;
(e) f, zayıf e-sürekli (kısaca $z.e.s.$) [11]:$\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\forall V \in \mathcal{U}(f(x)))(\exists U \in eO(X,x))(f[U] \subseteq cl(V))$;

(f) f, güçlü hafif e-sürekli (kısaca $g.h.e.s.$) [9]:$\Leftrightarrow$ $(\forall x \in X)(\forall V \in eO(Y, f(x)))(\exists U \in \theta O(X, x))(f[U] \subseteq V)$;
(g) f, güçlü e-sürekli (kısaca $g.e.s.$) :$\Leftrightarrow$ $(\forall V \in eO(Y))(f^{-1}[V] \in \tau)$;
(h) f, hafif e-sürekli (kısaca $h.e.s.$) [11]:$\Leftrightarrow$ $(\forall x \in X)(\forall V \in \theta O(Y, f(x)))(\exists U \in \theta O(X, x))(f[U] \subseteq V)$.

Tanım 2.3. $(X,\tau), (Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere
(a) f, R-map [32]:$\Leftrightarrow$ $(\forall V \in RO(Y))(f^{-1}[V] \in RO(X))$;
(b) f, hemen hemen sürekli (kısaca $h.h.s.$) [13]:$\Leftrightarrow$ $(\forall V \in RO(Y))(f^{-1}[V] \in \tau)$;
(c) f, hemen hemen α-sürekli (kısaca $h.h.\alpha.s.$) [15]:$\Leftrightarrow$ $(\forall V \in RO(Y))(f^{-1}[V] \in \alpha O(X))$;
(d) f, hemen hemen yarısürekli (kısaca $h.h.y.s.$) [14]:$\Leftrightarrow$ $(\forall V \in RO(Y))(f^{-1}[V] \in SO(X))$;
(e) f, hemen hemen önsürekli (kısaca $h.h.$ö$.s.$) [17]:$\Leftrightarrow$ $(\forall V \in RO(Y))(f^{-1}[V] \in PO(X))$;
(f) f, hemen hemen b-sürekli (kısaca $h.h.b.s.$) [18]:$\Leftrightarrow$ $(\forall V \in RO(Y))(f^{-1}[V] \in BO(X))$;
(g) f, hemen hemen β-sürekli (kısaca $h.h.\beta.s.$) [17]:$\Leftrightarrow$ $(\forall V \in RO(Y))(f^{-1}[V] \in \beta O(X))$;
(h) f, hemen hemen A-sürekli (kısaca $h.h.A.s.$) [16]:$\Leftrightarrow$ $(\forall V \in RO(Y))(f^{-1}[V] \in A(X))$.

Lemma 2.4. [1] (X,τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:
(1) $e\text{-}cl(X \setminus A) = X \setminus e\text{-}int(A)$;
(2) $A \in eO(X) \Leftrightarrow A = e\text{-}int(A)$ ve $A \in eC(X) \Leftrightarrow A = e\text{-}cl(A)$;
(3) $e\text{-}int(e\text{-}int(A)) = e\text{-}int(A)$ ve $e\text{-}cl(e\text{-}cl(A)) = e\text{-}cl(A)$.

Lemma 2.5. [31] $(X,\tau), (Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun δ-sürekli olması için gerek ve yeter koşul (Y,σ) topolojik uzayındaki her regüler açık kümenin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsünün (X,τ) topolojik uzayında δ-açık küme olmasıdır.

Lemma 2.6. [2] (X,τ) topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere eğer $A \in \delta O(X)$ ise $A \cap cl_\delta(B) \subseteq cl_\delta(A \cap B)$.

Lemma 2.7. [24] (X,τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:
(1) $scl(A) = A \cup int(cl(A))$;
(2) $sint(A) = A \cap cl(int(A))$.

Lemma 2.8. [33] (X,τ) topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine denktir:
(1) (X,τ), hemen hemen regüler;
(2) $(\forall x \in X)(\forall V \in RO(X,x))(\exists U \in RO(X,x))(cl(U) \subseteq V)$;
(3) $(\forall x \in X)(\forall M \in \mathcal{N}(x))(\exists V \in RO(X,x))(cl(V) \subseteq cl(int(M)))$;
(4) $(\forall x \in X)(\forall M \in \mathcal{N}(x))(\exists V \in \mathcal{U}(x))(cl(V) \subseteq cl(int(M)))$;
(5) $(\forall A \in RC(X))(\forall x \notin A)(\exists U \in \mathcal{U}(x))(\exists V \in \mathcal{U}(A))(cl(U) \cap cl(V) = \emptyset)$;
(6) $(\forall F \in RC(X))(\exists \mathcal{A} \subseteq RC(X))(F = \cap \mathcal{A})$.

3. HEMEN HEMEN e-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Tanım 3.1. [7] $(X,\tau), (Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

f, $(\tau\text{-}\sigma)$ hemen hemen e-sürekli (kısaca $h.h.e.s.$) :$\Leftrightarrow$ $(\forall V \in RO(Y))(f^{-1}[V] \in eO(X))$.

Uyarı 3.2. Tanım 3.1 ve Tanım 2.3'den aşağıdaki diyagram elde edilir:

$$\begin{array}{ccccccc} h.h.s. & \rightarrow & h.h.\alpha.s. & \rightarrow & h.h.\ddot{o}.s. & \rightarrow & \mathbf{h.h.e.s.} \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & h.h.b.s. & \rightarrow & h.h.\beta.s. \end{array}$$

Uyarı 3.3. Diyagramdaki gerektirmelerin karşıtı her zaman doğru değildir. Bu gerektirmelerin bazılarının karşıtlarının doğru olmadığına dair örnekler aşağıda verilmiştir. Diğer karşıt örnekler, ilgili makalelerde bulunabilir. Ayrıca yine aşağıdaki örneklerden de görüleceği üzere hemen hemen b-süreklilik ile hemen hemen e-süreklilik kavramları birbirinden bağımsız kavramlardır.

Örnek 3.4. $X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$ olmak üzere $f: X \to X$, $f(a) = a$, $f(b) = d$, $f(c) = d$, $f(d) = b$ fonksiyonu hemen hemen b-sürekli olduğundan aynı zamanda hemen hemen β-süreklidir fakat hemen hemen e-sürekli değildir.

Örnek 3.5. $X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$ olmak üzere $f: X \to X$, $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = b$, $f(d) = a$ fonksiyonu hemen hemen e-sürekli olmasına karşın hemen hemen β-sürekli değildir. Dolayısıyla ne hemen hemen b-sürekli ne de hemen hemen önsüreklidir.

Tanım 3.6. [8] $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$f, \delta\text{-yarısürekli} :\Leftrightarrow (\forall V \in \sigma)(f^{-1}[V] \in \delta SO(X)).$$

Uyarı 3.7. [1] $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$\delta\text{-yarısürekli} \to e\text{-sürekli}.$$

Sonuç 3.8. Tanım 3.6, Uyarı 3.7 ve Tanım 3.1'den aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\delta\text{-yarısürekli} \to e\text{-sürekli} \to \text{hemen hemen } e\text{-sürekli}.$$

Tanım 3.9. [4] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere

$$A, a\text{-açık} :\Leftrightarrow A \subseteq int(cl(int_\delta(A))).$$

Tanım 3.10. [4] $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$f, a\text{-sürekli} :\Leftrightarrow (\forall V \in \sigma)(f^{-1}[V] \in aO(X)).$$

Uyarı 3.11. [4] $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$a\text{-sürekli} \to \delta\text{-yarısürekli}.$$

Tanım 3.12. [7] $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere
(1) f, hemen hemen e^*-sürekli $:\Leftrightarrow (\forall V \in RO(Y))(f^{-1}[V] \in e^*O(X))$,
(2) f, hemen hemen a-sürekli $:\Leftrightarrow (\forall V \in RO(Y))(f^{-1}[V] \in aO(X))$.

Sonuç 3.13. Tanım 3.9, Tanım 3.10, Uyarı 3.11, Tanım 3.12 ve Tanım 3.1'den aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
a\text{-sür.} \arrow[r] \arrow[dr] & \delta\text{-yarısür.} \arrow[r] & e\text{-sür.} \arrow[r] & \text{hemen hemen } e\text{-sür.} \arrow[r] & \text{hemen hemen } e^*\text{-sür.} \\
& \text{hemen hemen } a\text{-sür.} \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}$$

Tanım 3.14. [6] (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere

$$A, e^*\text{-açık} :\Leftrightarrow A \subseteq cl(int(cl_\delta(A))).$$

Tanım 3.15. [6] $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$f, e^*\text{-sürekli} :\Leftrightarrow (\forall V \in \sigma)(f^{-1}[V] \in e^*O(X)).$$

Sonuç 3.16. Tanım 3.14, Tanım 3.15 ve Tanım 3.1'den aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
 & & & e^*\text{-sür.} \arrow[dr] & \\
a\text{-sür.} \arrow[r] \arrow[dr] & \delta\text{-yarısür.} \arrow[r] & e\text{-sür.} \arrow[r] \arrow[ur] & \text{hemen hemen } e\text{-sür.} \arrow[r] & \text{hemen hemen } e^*\text{-sür.} \\
 & \text{hemen hemen } a\text{-sür.} \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}$$

Tanım 3.17. [5] $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$f, \text{hemen hemen } \delta\text{-yarısürekli} :\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\forall V \in RO(Y,f(x)))(\exists U \in \delta SO(X,x))(f[U] \subseteq V).$$

Uyarı 3.18. [5] $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$R\text{-map} \to \delta\text{-sürekli} \to \text{hemen hemen } \delta\text{-yarısürekli} \to \text{hemen hemen yarısürekli}.$$

Sonuç 3.19. Tanım 3.17, Uyarı 3.18 ve Tanım 3.1'den aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
R\text{-map} \arrow[r] & \delta\text{-sürekli} \arrow[r] & \text{hemen hemen } \delta\text{-yarısürekli} \arrow[r] \arrow[d] & \text{hemen hemen yarısürekli} \\
 & & \text{hemen hemen } e\text{-sürekli} &
\end{tikzcd}$$

Tanım 3.20. [3] $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$f, \text{hemen hemen } \delta\text{-önsürekli} :\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\forall V \in RO(Y,f(x)))(\exists U \in \delta PO(X,x))(f[U] \subseteq V).$$

Uyarı 3.21. [3] $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
\text{hemen hemen sürekli} \arrow[r] & \text{hemen hemen } \alpha\text{-sürekli} \arrow[r] & \text{hemen hemen önsürekli} \arrow[d] \\
 & & \text{hemen hemen } \delta\text{-önsürekli}
\end{tikzcd}$$

Sonuç 3.22. Tanım 3.20, Uyarı 3.21 ve Tanım 3.1'den aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
\text{hemen hemen sürekli} \arrow[r] & \text{hemen hemen } \alpha\text{-sürekli} \arrow[r] & \text{hemen hemen önsürekli} \arrow[d] \\
 & \text{hemen hemen } e\text{-sürekli} & \text{hemen hemen } \delta\text{-önsürekli} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Teorem 3.23. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine denktir:
(1) f, hemen hemen e-sürekli;
(2) $(\forall x \in X)(\forall V \in RO(Y,f(x)))(\exists U \in eO(X,x))(f[U] \subseteq V)$;
(3) $(\forall x \in X)(\forall V \in \mathcal{U}(Y,f(x)))(\exists U \in eO(X,x))(f[U] \subseteq int(cl(V)))$;
(4) $(\forall F \in RC(Y))(f^{-1}[F] \in eC(X))$.

Kanıt. **(1) ⇒ (2):** $x \in X$ ve $V \in RO(Y,f(x))$ olsun.

$$\left.\begin{array}{r} V \in RO(Y,f(x)) \overset{(1)}{\Rightarrow} f^{-1}[V] \in eO(X,x) \\ U := f^{-1}[V] \end{array}\right\} \Rightarrow (U \in eO(X,x))(f[U] \subseteq V).$$

(2) ⇒ (3): $x \in X$ ve $V \in \mathcal{U}(Y,f(x))$ olsun.

$V \in \mathcal{U}(Y, f(x)) \Rightarrow int(cl(V)) \in RO(Y, f(x)) \overset{(2)}{\Rightarrow} (\exists U \in eO(X, x))(f[U] \subseteq int(cl(V)))$.
(3) ⇒ (1): $V \in RO(Y)$ ve $x \in f^{-1}[V]$ olsun.
$(V \in RO(Y))(x \in f^{-1}[V]) \Rightarrow V \in RO(Y, f(x)) \subseteq \mathcal{U}(Y, f(x)) \Rightarrow V \in \mathcal{U}(Y, f(x))$
$\overset{(3)}{\Rightarrow} (\exists U \in eO(X, x))(f[U] \subseteq int(cl(V)) = V)$
$\Rightarrow (\exists U \in eO(X, x))(U \subseteq f^{-1}[V])$
$\Rightarrow x \in e\text{-}int(f^{-1}[V])$.
(1) ⇒ (4) ve **(4) ⇒ (1)** gerektirmeleri açık.

Teorem 3.24. $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine denktir:
(1) f, hemen hemen e-sürekli;
(2) $(\forall A \subseteq X)(f[e\text{-}cl(A)] \subseteq cl_\delta(f[A]))$;
(3) $(\forall B \subseteq Y)(e\text{-}cl(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[cl_\delta(B)])$;
(4) $(\forall F \in \delta C(Y))(f^{-1}[F] \in eC(X))$;
(5) $(\forall V \in \delta O(Y))(f^{-1}[V] \in eO(X))$.

Kanıt. **(1) ⇒ (2):** $x \notin f^{-1}[cl_\delta(f[A])]$ olsun.
$x \notin f^{-1}[cl_\delta(f[A])] \Rightarrow f(x) \notin cl_\delta(f[A]) \Rightarrow (\exists U \in RO(Y, f(x)))(U \cap f[A] = \emptyset)$
$\overset{(1)}{\Rightarrow} (f^{-1}[U] \in eO(X, x))(f^{-1}[U] \cap A = \emptyset)$
$\Rightarrow x \notin e\text{-}cl(A)$.
(2) ⇒ (3): $B \subseteq Y$ olsun.
$B \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}[B] \subseteq X \overset{(2)}{\Rightarrow} f[e\text{-}cl(f^{-1}[B])] \subseteq cl_\delta(f[f^{-1}[B]]) \subseteq cl_\delta(B)$
$\Rightarrow e\text{-}cl(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[cl_\delta(B)]$.
(3) ⇒ (4): $F \in \delta C(Y)$ olsun.
$F \in \delta C(Y) \overset{(3)}{\Rightarrow} e\text{-}cl(f^{-1}[F]) \subseteq f^{-1}[cl_\delta(F)] = f^{-1}[F] \Rightarrow f^{-1}[F] \in eC(X)$.
(4) ⇒ (5): Açık.
(5) ⇒ (1): Her regüler açık küme, δ-açık küme olduğundan ispatın bu kısmı aşikâr.

Teorem 3.25. $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine denktir:
(1) f, hemen hemen e-sürekli;
(2) $(\forall B \subseteq Y)(e\text{-}cl(f^{-1}[cl(int(cl(B)))]) \subseteq f^{-1}[cl(B)])$;
(3) $(\forall F \in C(Y))(e\text{-}cl(f^{-1}[cl(int(F))]) \subseteq f^{-1}[F])$;
(4) $(\forall V \in \sigma)(f^{-1}[cl(V)] \in eC(X))$;
(5) $(\forall V \in \sigma)(f^{-1}[V] \subseteq e\text{-}int(f^{-1}[scl(V)]))$.

Kanıt. **(1) ⇒ (2):** $B \subseteq Y$ olsun.
$$\left.\begin{array}{r} B \subseteq Y \Rightarrow cl(int(cl(B))) \in RC(Y) \\ (1) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Teorem 3.23(4)}} f^{-1}[cl(int(cl(B)))] \in eC(X)$$
$\Rightarrow e\text{-}cl(f^{-1}[cl(int(cl(B)))]) \subseteq f^{-1}[cl(B)]$.
(2) ⇒ (3): $F \in C(Y)$ olsun.
$F \in C(Y) \Rightarrow F = cl(F) \overset{(2)}{\Rightarrow} e\text{-}cl(f^{-1}[cl(int(cl(F)))]) = e\text{-}cl(f^{-1}[cl(int(F))]) \subseteq f^{-1}[cl(F)] = f^{-1}[F]$.
(3) ⇒ (4): $V \in \sigma$ olsun.
$V \in \sigma \Rightarrow cl(V) \in RC(Y) \overset{(3)}{\Rightarrow} e\text{-}cl(f^{-1}[cl(int(cl(V)))]) = e\text{-}cl(f^{-1}[cl(V)]) \subseteq f^{-1}[cl(V)]$
$\Rightarrow f^{-1}[cl(V)] \in eC(X)$.
(4) ⇒ (5): $V \in \sigma$ olsun.
$$\left.\begin{array}{l} V \in \sigma \Rightarrow V \cup int(cl(V)) = int(cl(V)) \\ \text{(Lemma 2.7) } scl(V) = V \cup int(cl(V)) \end{array}\right\} \Rightarrow scl(V) = int(cl(V)) \xRightarrow{\text{Lemma 2.4(1)}}$$
$\Rightarrow X \setminus e\text{-}int(f^{-1}[scl(V)]) = e\text{-}cl(f^{-1}[Y \setminus int(cl(V))]) = f^{-1}[cl(Y \setminus cl(V))] \subseteq X \setminus f^{-1}[V]$
$\Rightarrow f^{-1}[V] \subseteq e\text{-}int(f^{-1}[scl(V)])$.

(5) ⇒ (1): $x \in X$ ve $V \in \mathcal{U}(Y, f(x))$ olsun.

$$\left.\begin{array}{r} V \in \mathcal{U}(Y, f(x)) \overset{(5)}{\Rightarrow} x \in f^{-1}[V] \subseteq e\text{-}int(f^{-1}[scl(V)]) \\ U := e\text{-}int(f^{-1}[scl(V)]) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (U \in eO(X,x))(f[U] = f[e\text{-}int(f^{-1}[scl(V)])] \subseteq f[f^{-1}[scl(V)]] \subseteq scl(V) = int(cl(V)))$$

Bu ise Teorem 3.23(3)'den dolayı f fonksiyonunun hemen hemen e-sürekli olduğu anlamına gelir.

Teorem 4.1. $(X,\tau), (Y,\sigma), (Z,\mu)$ topolojik uzaylar, $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:
(1) f, hemen hemen e-sürekli ve g, R-map ise $g \circ f$, hemen hemen e-süreklidir;
(2) f, e-kararsız ve g, hemen hemen e-sürekli ise $g \circ f$, hemen hemen e-süreklidir;
(3) f, e-sürekli ve g, hemen hemen sürekli ise $g \circ f$, hemen hemen e-süreklidir;
(4) f, hemen hemen e-sürekli ve g, δ-sürekli ise $g \circ f$, hemen hemen e-süreklidir.

Kanıt. Açık.

Lemma 4.2. [2] (X,τ) topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere eğer $A \in \delta O(X)$ ve $B \in eO(X)$ ise $A \cap B \in eO(X)$.

Teorem 4.3. $(X,\tau), (Y,\sigma)$ topolojik uzaylar, $f: X \to Y$ fonksiyon ve $A \subseteq X$ olmak üzere

$$(f, h.h.e.s.)(A \in \delta O(X)) \Rightarrow f_A: A \to Y \ h.h.e.s.$$

Kanıt. $V \in RO(Y)$ olsun.

$$V \in RO(Y) \xRightarrow{f\ h.h.e.s.} f^{-1}[V] \in eO(X) \xRightarrow{\text{Lemma 4.2}} (f_A)^{-1}[V] = f^{-1}[V] \cap A \in eO(A).$$

Teorem 4.4. $(X,\tau), (Y,\sigma)$ topolojik uzaylar, $f: X \to Y$ fonksiyon ve $g(x) = (x, f(x))$ kuralı ile verilen $g: X \to X \times Y$ fonksiyonu f fonksiyonunun graf fonksiyonu olmak üzere

$$g, h.h.e.s. \Leftrightarrow f, h.h.e.s.$$

Kanıt. *Gerek Kısmı.* $x \in X$ ve $V \in RO(Y, f(x))$ olsun.

$$\left.\begin{array}{r} (x \in X)(V \in RO(Y, f(x))) \Rightarrow g(x) = (x, f(x)) \in X \times V \in RO(X \times Y) \\ g, h.h.e.s. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists U \in eO(X,x))(g[U] \subseteq X \times V) \Rightarrow (\exists U \in eO(X,x))(f[U] \subseteq V).$$

Yeter Kısmı. $x \in X$ ve $W \in RO(X \times Y, g(x))$ olsun.

$$(x \in X)(W \in RO(X \times Y, g(x))) \Rightarrow (\exists G \in RO(X,x))(\exists V \in RO(Y, f(x)))(G \times V \subseteq W)$$
$$\xRightarrow{f\ h.h.e.s.} (\exists G \in RO(X,x))(\exists H \in eO(X,x))(f[H] \subseteq V)$$
$$\xRightarrow{\text{Lemma 4.2}} (U := G \cap H \in eO(X,x))(g[U] \subseteq G \times V \subseteq W).$$

Teorem 4.5. $(X,\tau), (Y_\alpha, \sigma_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ topolojik uzaylar, $(\prod Y_\alpha, \prod \sigma_\alpha)$ çarpım uzayı, $f: X \to \prod Y_\alpha$ fonksiyon ve $P_\alpha: \prod Y_\alpha \to Y_\alpha$ α-ıncı izdüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$(f, h.h.e.s)(\alpha \in \Lambda) \Rightarrow P_\alpha \circ f: X \to Y_\alpha \ h.h.e.s.$$

Kanıt. $V_\alpha \in RO(Y_\alpha)$ olsun.

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \in \Lambda \Rightarrow P_\alpha, \text{sürekli açık} \Rightarrow P_\alpha \text{ is } R\text{-map} \\ V_\alpha \in RO(Y_\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow (P_\alpha)^{-1}[V_\alpha] \in RO(\prod Y_\alpha)$$

$\xRightarrow{f\ h.h.e.s.} f^{-1}[(P_\alpha)^{-1}[V_\alpha]] = (P_\alpha \circ f)^{-1}[V_\alpha] \in eO(X).$

Teorem 4.6. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (5) ⇒ (6) gerektirmeleri geçerlidir:
(1) f, güçlü θ-e-sürekli;
(2) f, e-sürekli;
(3) $(\forall B \subseteq Y)(f^{-1}[cl_\delta(B)] \in eC(X))$;
(4) f, hemen hemen e-sürekli;
(5) f, zayıf e-sürekli;
(6) f, hafif e-sürekli.

Kanıt. **(1) ⇒ (2):** Güçlü θ-e-süreklilik ve e-süreklilik tanımlarından açık.
(2) ⇒ (3): $B \subseteq Y$ olsun.
$B \subseteq Y \Rightarrow cl_\delta(B) \in \delta C(Y) \subseteq C(Y) \Rightarrow cl_\delta(B) \in C(Y) \overset{(2)}{\Rightarrow} f^{-1}[cl_\delta(B)] \in eC(X).$
(3) ⇒ (4): $B \subseteq Y$ olsun.
$B \subseteq Y \overset{(3)}{\Rightarrow} f^{-1}[cl_\delta(B)] \in eC(Y) \Rightarrow f^{-1}[cl_\delta(B)] = e\text{-}cl(f^{-1}[cl_\delta(B)]) \supseteq e\text{-}cl(f^{-1}[B])$
Bu ise Teorem 3.24(3)'den dolayı f fonksiyonunun hemen hemen e-sürekli olduğu anlamına gelir.
(4) ⇒ (5): Hemen hemen e-süreklilik ve zayıf e-süreklilik tanımlarından açık.
(5) ⇒ (6): [10] Teorem 3.8.

Lemma 4.7. [12] $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere eğer (Y,σ) topolojik uzayı regüler ise f fonksiyonunun güçlü θ-e-sürekli olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun e-sürekli olmasıdır.

Sonuç 4.8. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere eğer (Y,σ) topolojik uzayı regüler ise Teorem 4.6'daki özellikler birbirine denktir.

Teorem 4.9. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (5) ⇒ (6) gerektirmeleri geçerlidir:
(1) f, güçlü hafif e-sürekli;
(2) f, güçlü e-sürekli;
(3) f, e-sürekli;
(4) f, hemen hemen e-sürekli;
(5) f, zayıf e-sürekli;
(6) f, hafif e-sürekli.

Kanıt. **(1) ⇒ (2):** [9] Teorem 3.3.
(2) ⇒ (3): Güçlü e-süreklilik ve e-süreklilik tanımlarından açık.
(3) ⇒ (4) ⇒ (5) ⇒ (6) gerektirmeleri Teorem 4.6'dan açık.
(6) ⇒ (1): Lemma 4.7'den açık.

Tanım 4.10. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere eğer (X,τ) topolojik uzayındaki her U e-açık kümesi için $f[U] \subseteq int(cl(f[U]))$ koşulu sağlanırsa f fonksiyonuna hemen hemen e-açık fonksiyon (kısaca $h.h.e.a.$) denir. Biçimsel olarak

$$((X,\tau),(Y,\sigma) \text{ topolojik uzaylar})(f \in Y^X)$$
$$:\Rightarrow$$
$$f, \text{hemen hemen } e\text{-açık} :\Leftrightarrow (\forall U \in eO(X))(f[U] \subseteq int(cl(f[U])))$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 4.11. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$(f, h.h.e.a.)(f, z.e.s.) \Rightarrow f, h.h.e.s.$$

Kanıt. $x \in X$ ve $V \in \mathcal{U}(Y, f(x))$ olsun.
$(x \in X)(V \in \mathcal{U}(Y, f(x))) \xRightarrow{f\ z.e.s.} (\exists U \in eO(X,x))(f[U] \subseteq cl(V))$
$\xRightarrow{f\ h.h.e.a.} (\exists U \in eO(X,x))(f[U] \subset int(cl(f[U])) \subseteq int(cl(V)))$.

5. AYIRMA ÖZELLİKLERİ

Tanım 5.1. (X,τ) topolojik uzay olmak üzere
(a) eğer uzayın her F regüler kapalı kümesi ve her $x \notin F$ için $x \in U$ ve $F \subseteq V$ olacak şekilde ayrık U ve V açık kümeleri varsa uzaya hemen hemen regüler uzay [33] denir.
(b) eğer uzayın her U açık kümesi ve bu açık kümeye ait her x noktası için $x \in V \subseteq U$ olacak şekilde en az bir V regüler açık kümesi varsa uzaya yarıregüler uzay [19] denir.
(c) eğer uzayın her e-kapalı altkümesi kapalı küme ise uzaya T_e-uzayı [10] denir.

Teorem 5.2. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$(Y,\sigma), \text{yarıregüler} \Rightarrow (f, h.h.e.s. \Leftrightarrow f, e.s.).$$

Kanıt. *Gerek Kısmı.* $x \in X$ ve $V \in \mathcal{U}(Y, f(x))$ olsun.
$V \in \mathcal{U}(Y, f(x)) \xRightarrow{(Y,\sigma)\ \text{yarıregüler}} (\exists G \in RO(Y, f(x)))(G \subseteq V) \xRightarrow{f\ h.h.e.s.} (\exists U \in eO(X,x))(f[U] \subseteq V)$.
Yeter Kısmı. Açık.

Teorem 5.3. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$(Y,\sigma), \text{hemen hemen regüler} \Rightarrow (f, z.e.s. \Leftrightarrow f, h.h.e.s.).$$

Kanıt. *Gerek Kısmı.* Let $x \in X$ and $V \in \mathcal{U}(Y, f(x))$.
$V \in \mathcal{U}(Y, f(x)) \xRightarrow{(Y,\sigma)\ \text{hemen hemen regüler (Lemma 2.8)}} (\exists G \in RO(Y, f(x)))(G \subseteq cl(G) \subseteq int(cl(V)))$
$\xRightarrow{f\ z.e.s.} (\exists U \in eO(X,x))(f[U] \subseteq cl(G) \subseteq int(cl(V)))$
Yeter Kısmı. Açık.

Her açık kümenin kapanışının açık küme olduğu uzaylara aşırı bağlantısız uzay [34] ve yoğun her altkümesinin açık olduğu uzaylara da submaksimal uzay [34] dendiğini hatırlattıktan sonra aşırı bağlantısız uzaylarda bazı kavramların çakıştığını ifade eden aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 5.4. (X,τ) topolojik uzay olmak üzere eğer X uzayı aşırı bağlantısız uzay ise $RO(X) = \theta O(X) = \delta O(X) = \tau \cap C(X)$.

Teorem 5.5. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere eğer (Y,σ) topolojik uzayı aşırı bağlantısız ise aşağıdaki özellikler denktir:
(1) f, hemen hemen e-sürekli;
(2) f, zayıf e-sürekli;
(3) f, hafif e-sürekli.

Kanıt. (1) ⇒ (2) ⇒ (3) gerektirmeleri Teorem 4.6'dan açık.
(3) ⇒ (1): Önerme 5.4'den açık.

Teorem 5.6. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere olmak üzere (X,τ) topolojik uzayı aşırı bağlantısız ve T_e-uzayı ise aşağıdaki özellikler denktir:
(1) f, hemen hemen sürekli;
(2) f, hemen hemen α-sürekli;
(3) f, hemen hemen önsürekli;
(4) f, hemen hemen yarısürekli;
(5) f, hemen hemen e-sürekli;
(6) f, hemen hemen b-sürekli;
(7) f, hemen hemen β-sürekli.

Kanıt. Aşırı bağlantısız T_e-uzayında $\tau = \alpha O(X) = PO(X) = eO(X) = SO(X) = BO(X) = \beta O(X)$ olduğundan ispat açık.

Tanım 5.7. (X,τ) topolojik uzay olmak üzere
(a) eğer uzayın birbirinden farklı her x,y nokta çifti için $y \notin U$ ve $x \notin V$ olacak şekilde $U \in eO(X,x)$ (sırasıyla $U \in RO(X,x)$) ve $V \in eO(X,y)$ (sırasıyla $V \in RO(X,y)$) varsa bu uzaya e-T_1 uzayı [2] (sırasıyla r-T_1 uzayı [35]) denir.
(b) eğer uzayın birbirinden farklı her x,y nokta çifti için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U \in eO(X,x)$ ve $V \in eO(X,y)$ varsa bu uzaya e-T_2 uzayı [2] denir.

Teorem 5.8. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$(f, h.h.e.s.)(f, \text{birebir})((Y,\sigma), r\text{-}T_1) \Rightarrow (X,\tau), e\text{-}T_1.$$

Kanıt. $x,y \in X$ ve $x \neq y$ olsun.

$$(x,y \in X)(x \neq y) \xRightarrow{f \text{ birebir}} f(x) \neq f(y)) \xRightarrow{(Y,\sigma)\ r\text{-}T_1}$$
$$\Rightarrow (\exists V_1 \in RO(Y,f(x)))(\exists V_2 \in RO(Y,f(y)))(f(x) \notin V_2)(f(y) \notin V_1)$$
$$\xRightarrow{f\ h.h.e.s.} (\exists U_1 \in eO(X,x))(\exists U_2 \in eO(X,y))(f[U_1] \subset V_1)(f[U_2] \subset V_2)$$
$$\Rightarrow (\exists U_1 \in eO(X,x))(\exists U_2 \in eO(X,y))(U_1 \subset f^{-1}[V_1])(U_2 \subset f^{-1}[V_2])$$
$$\Rightarrow (\exists U_1 \in eO(X,x))(\exists U_2 \in eO(X,y))(y \notin U_1)(x \notin U_2).$$

Teorem 5.9. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ fonksiyon olmak üzere

$$(f, h.h.e.s.)(f, \text{birebir})((Y,\sigma), T_2) \Rightarrow (X,\tau), e\text{-}T_2.$$

Kanıt. $x,y \in X$ ve $x \neq y$ olsun.

$$(x,y \in X)(x \neq y) \xRightarrow{f \text{ birebir}} f(x) \neq f(y)$$
$$\xRightarrow{(Y,\sigma)\ T_2} (\exists V_1 \in \mathcal{U}(Y,f(x)))(\exists V_2 \in \mathcal{U}(Y,f(y)))(V_1 \cap V_2 = \emptyset)$$
$$\xRightarrow{f\ h.h.e.s.} (\exists U_1 \in eO(X,x))(\exists U_2 \in eO(X,y))(f[U_1] \subset int(cl(V_1)))(f[U_2] \subset int(cl(V_2)))$$
$$\Rightarrow (\exists U_1 \in eO(X,x))(\exists U_2 \in eO(X,y))(f[U_1] \cap f[U_2] \subset int(cl(V_1)) \cap int(cl(V_2)) = \emptyset)$$
$$\Rightarrow (\exists U_1 \in eO(X,x))(\exists U_2 \in eO(X,y))(f[U_1 \cap U_2] \subset f[U_1] \cap f[U_2] = \emptyset)$$
$$\Rightarrow (\exists U_1 \in eO(X,x))(\exists U_2 \in eO(X,y))(U_1 \cap U_2 = \emptyset).$$

Bir (X,τ) topolojik uzayındaki e-açık kümelerin her sonlu sayıdaki arakesitlerinin e-açık küme olduğu uzaylara e-Alexandroff [9] ve yine bir (X,τ) topolojik uzayındaki regüler açık kümelerin oluşturduğu aile τ topolojisi için bir baz ise buna τ topolojisinin bir yarıregülerleştirmesi (semiregularization) [19] dendiğini ve τ_s ile gösterildiğini hatırlayalım. Ayrıca bir (X,τ) topolojik uzayındaki e-açık kümelerin oluşturduğu aileden doğal bir şekilde elde edilen $\tau_e \coloneqq \{U | (U \subseteq X)(H \in eO(X))(U \cap H \in eO(X))\}$ ailesi, X kümesi üzerinde bir topolojidir ve bu topolojiye (X,τ) topolojik uzayındaki e-açık küme ailesinin ürettiği topoloji denir. Dolayısıyla $\tau \subseteq \tau_e \subseteq eO(X)$ ve e-Alexandroff uzaylarda da $\tau_e = eO(X)$ olduğu aşikârdır.

Teorem 5.10. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f{:}\,X\to Y$ fonksiyon olmak üzere eğer (X,τ) topolojik uzayı e-Alexandroff ise aşağıdaki özellikler denktir:
(1) $f,(\tau\text{-}\sigma)$ hemen hemen e-sürekli;
(2) $f,(\tau\text{-}\sigma_s)$ e-sürekli;
(3) $f,(\tau_e\text{-}\sigma)$ hemen hemen sürekli;
(4) $f,(\tau_e\text{-}\sigma_s)$ sürekli.

Kanıt. **(1) ⇒ (2):** $V\in\sigma_s$ olsun.
$V\in\sigma_s\Rightarrow(\exists\mathcal{A}\subset RO(Y,\sigma))(V=\cup\mathcal{A})$
$\xRightarrow{f\ h.h.e.s.}(\mathcal{B}:=\{f^{-1}[A]|A\in\mathcal{A}\}\subset eO(X))(\cup\mathcal{B}=f^{-1}[\cup\mathcal{A}]=f^{-1}[V]\in eO(X))$.
O halde f fonksiyonu $(\tau\text{-}\sigma_s)$ e-süreklidir.
(2) ⇒ (3): $V\in\sigma$ olsun.

$$\left.\begin{array}{r}V\in RO(Y,\sigma)\Rightarrow V\in\sigma_s\xRightarrow{f\ e.s.}f^{-1}[V]\in eO(X)\\(X,\tau),e\text{-Alexandroff}\Rightarrow eO(X)=\tau_e\end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}[V]\in\tau_e$$

O halde f fonksiyonu $(\tau_e\text{-}\sigma)$ hemen hemen süreklidir.
(3) ⇒ (4): Açık.
(4) ⇒ (1): Açık.

Teorem 5.11. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f,g{:}\,X\to Y$ fonksiyonlar olmak üzere

$$((X,\tau),e\text{-Alexandroff})(f\text{ ve }g,h.h.e.s.)((Y,\sigma),\text{Hausdorff})\Rightarrow\Delta=\{x|(f(x)=g(x))(x\in X)\}\in eC(X).$$

Kanıt. (X,τ) topolojik uzayı e-Alexandroff olsun.

$$\left.\begin{array}{r}f\text{ ve }g,(\tau\text{-}\sigma)\ h.h.e.s.\xRightarrow{\text{Teorem 5.10}}f\text{ ve }g,(\tau_e\text{-}\sigma_s)\text{ sürekli}\\(Y,\sigma),\text{Hausdorff}\Leftrightarrow(Y,\sigma_s),\text{Hausdorff}\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta=\{x|f(x)=g(x),x\in X\}\in C(X,\tau_e)$$

$\xRightarrow{(X,\tau),\ e\text{-Alexandroff}}\Delta=\{x|f(x)=g(x),x\in X\}\in C(X,\tau)$.

Teorem 5.12. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f,g{:}\,X\to Y$ fonksiyonlar olmak üzere

$$((Y,\sigma),\text{Hausdorff})(f,\delta.s.)(g,h.h.e.s.)\Rightarrow\Delta=\{x|(f(x)=g(x))(x\in X)\}\in eC(X).$$

Kanıt. $x\notin\Delta$ olsun.

$$\left.\begin{array}{r}x\notin\Delta\Rightarrow f(x)\neq g(x)\\(Y,\sigma),\text{Hausdorff}\end{array}\right\}\Rightarrow(\exists V\in\mathcal{U}(Y,f(x)))(\exists W\in\mathcal{U}(Y,g(x)))(V\cap W=\emptyset)$$

$\Rightarrow(\exists V\in\mathcal{U}(Y,f(x)))(\exists W\in\mathcal{U}(Y,g(x)))(int(cl(V))\cap int(cl(W))=\emptyset)$
$\xRightarrow{(f\ \delta.s.)(g\ h.h.e.s.)}(\exists G\in\mathcal{U}(x))(\exists H\in eO(X,x))(f[int(cl(G))]\subset int(cl(V)))(g[H]\subset int(cl(W)))$
$\xRightarrow{\text{Lemma 4.2}}(U:=int(cl(G))\cap H\in eO(X,x))(U\cap\Delta=\emptyset)$
$\Rightarrow x\notin e\text{-}cl(\Delta)$.

Teorem 5.13. $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f,g{:}\,X\to Y$ fonksiyonlar olmak üzere

$$((X,\tau),\text{yarıregüler})((Y,\sigma),\text{Hausdorff})(f,\text{hemen hemen sürekli})(g,\text{hemen hemen }e\text{-sürekli})$$
$$\Rightarrow$$
$$\Delta=\{x|(f(x)=g(x))(x\in X)\}\in eC(X).$$

Kanıt. Yarıregüler uzaylarda her açık küme, δ-açık küme olduğundan ispat, Teorem 5.12'ye benzer şekilde yapılır.

REFERANSLAR

[1] Ekici E. On e-open sets, $\mathcal{DP}$*-sets and $\mathcal{DPE}$*-sets and decompositions of continuity. Arab J Sci Eng Sect A Sci 2008; 2: 269-282.

[2] Ekici E. New forms of contra continuity. Carpathian J Math 2008; 24(1): 37-45.

[3] Ekici E. On almost continuity. Kyungpook Math J 2006; 46: 119-130.

[4] Ekici E. On a-open sets, A^*-sets and decompositions of continuity and super-continuity. Annales Univ Sci Budapest Eötvös Sect Math 2008; 51: 39-51.

[5] Ekici E. On δ-semiopen sets and a generalization of functions. Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica (3s.) 2005; 23(1-2): 73-84.

[6] Ekici E. On e^*-open sets and $(\mathrm{D}, \mathrm{S})^*$-sets. Mathematica Moravica 2009; 13(1): 29-36.

[7] Ekici E. Some generalizatons of almost contra-super-continuity. Filomat 2007; 21(2): 31-44.

[8] Ekici E, Navalagi G.B. δ-semicontinuous functions. Math Forum 2004-2005; 17: 29-42.

[9] Caldas M, Jafari S. On strongly faint e-continuous functions. Proyecciones J Math 2011; 30(1): 29-41.

[10] Caldas M. On the faintly e-continuous functions. Sarajevo J Math 2012; 8(20): 159-170.

[11] Özkoç M, Aslım G. On weakly e-continuous functions. Hacet J Math Stat 2011; 40(6): 781-791.

[12] Özkoç M, Aslım G. On strongly θ-e-continuous functions. Bull Korean Math Soc 2010; 47(5): 1025-1036.

[13] Singal MK, Singal AR. Almost-continuous mappings. Yokohama Math J 1968; 16: 63-73.

[14] Munshi BM, Bassan DS. Almost semi-continuous mappings. Math Student 1981; 49: 239-248.

[15] Noiri T. Almost α-continuous functions. Kyungpook Math J 1988; 28: 71-77.

[16] Popa V. Some properties of almost feebly continuous functions. Demonstratio Math 1990; 23: 985-991.

[17] Nasef AA, Noiri T. Some weak forms of almost continuity. Acta Math Hung 1997; 74: 211-219.

[18] Keskin A, Noiri T. Almost b-continuous functions. Chaos Soliton Fract 2009; 41: 72-81.

[19] Stone MH. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans Amer Math Soc 1937; 41: 375-381.

[20] Velicko NV. H-closed topological spaces. Amer Math Soc Transl Ser 2 1968; 78: 103-118.

[21] Long PE, Herrington LL. The T_θ-topology and faint continuous functions. Kyungpook Math J 1982; 22: 7-14.

[22] Tong JC. A decomposition of continuity. Acta Math Hung 1986; 48: 11-15.

[23] Njastad O. On some classes of nearly open sets. Pac J Math 1965; 15: 961-970.

[24] Levine N. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces. Amer Math Monthly 1963; 70: 36-41.

[25] Mashhour AS, Abd-El Monsef ME, El-Deep SN. On precontinuous and weak precontinuous functions. Proc Math Phys Soc Egypt 1982; 51: 47-53.

[26] Andrijevic D. On b-open sets. Mat Vesnik 1996; 48: 59-64.

[27] El-Atik AA. A study on some types of mappings on topological spaces. MSc, Tanta University, Egypt, 1997.

[28] Dontchev J, Przemski M. On the various decompositions of continuous and some weakly continuous functions. Acta Math Hung 1996; 71(1-2): 109-120.

[29] Abd El-Monsef ME, El-Deep SN, Mohmoud RA. β-open sets and β-continuous mappings. Bull Fac Sci Assiut University 1983; 12: 77-90.

[30] Andrijevic D. Semi-preopen sets. Mat Vesnik 1986; 38: 24-32.

[31] Noiri T. On δ-continuous functions. J Korean Math Soc 1980; 16: 161-166.

[32] Carnahan D. Some properties related to compactness in topological spaces. PhD, University of Arkansas, USA, 1973.

[33] Singal MK, Arya SP. On almost-regular spaces. Glas Mat 1969; 4(24): 89-99.

[34] Bourbaki N. General Topology, Part I, Hermann, Paris; Addision-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966.

[35] Ekici E. Generalization of perfectly continuous, regular set-connected and clopen functions. Acta Math Hung 2005; 107(3): 193-206.