ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ –B
Teorik Bilimler

ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY –B
Theoretical Sciences

Cilt/Vol.:1-Sayı/No: 2 : 129-133 (2011)

HOPF DEMETLERİ ÜZERİNDE YENİ BİR KONNEKSİYON FORMLARI AİLESİ

Nedim DEĞİRMENCİ [1], Mehmet ERGEN [1]

ÖZ

Bu çalışmada öncelikle $S^1 \to S^3 \to S^2$ ve $S^3 \to S^7 \to S^4$ standart Hopf demetleri üzerindeki doğal konneksiyon formları kullanılarak, bu demetler üzerinde sonsuz sayıda konneksiyon 1-formu inşa edilmiştir. Daha sonra, yüksek boyutlu kompleks $U(1) \to S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ ve kuaterniyonik $Sp(1) \to S^{4n-1} \to \mathbb{H}P^{n-1}$ Hopf demetleri üzerinde parametrelere bağlı konneksiyon 1-formları ailesi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Asli lif demeti, Konneksiyon 1-formu, Hopf demetleri.

A NEW FAMILY OF CONNECTION FORMS ON THE HOPF BUNDLES

ABSTRACT

In this work firstly we constructed infinite number of connection 1-forms on the standard Hopf bundles $S^1 \to S^3 \to S^2$ and $S^3 \to S^7 \to S^4$ by using the canonical connection 1-forms on these bundles. Secondly it is given a parametric family of connection 1-forms on higher dimensional complex $U(1) \to S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ and quaternionic $Sp(1) \to S^{4n-1} \to \mathbb{H}P^{n-1}$ Hopf bundles.

Key Words: Principal fibre bundle, Connection 1-form, Hopf bundles.

1. GİRİŞ

Matematikteki sofistike kavramlardan birisi de asli lif demetleridir. Asli lif demetlerinin en önemlilerinden biri olan Hopf demetleri zarif bir yapıya sahiptir. Asli lif demetleri üzerinde tanımlı konneksiyon 1-formu da oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir (Naber, 1997; Nakahara, 1990). Ancak Hopf demetleri üzerinde bunların doğal örnekleri vardır. Bu çalışmanın amacı, bu doğal örneklerden hareketle yeni konneksiyon 1-formları inşa etmektir.

Çalışma boyunca (Naber, 1997) de verilen tanımlar ve gösterimler esas alınacaktır.

[1,] Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 26470, Eskişehir.
Tel: 0222 3350580/4633, e-posta: ndegirmenci@anadolu.edu.tr (N. DEĞİRMENCİ),
Tel: 0222 3350580/4660, e-posta: mergen@anadolu.edu.tr (M. ERGEN)

Geliş: 7 Temmuz 2010; **Düzeltme:** 28 Eylül 2010; **Kabul:** 2 Kasım 2010

G bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ onun Lie cebiri olmak üzere $\mathfrak{B} = (P, \pi, \sigma), X$ diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir asli G-lif demeti olsun. G'nin P üzerindeki sağ etkisini σ ile gösterelim. P üzerinde bir konneksiyon formu aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathfrak{g}$-değerli diferansiyellenebilir bir ω 1-formudur:

i) her $g \in G$ için $(\sigma_g)^* \omega = ad_{g^{-1}} \circ \omega$, yani her $g \in G$, her $p \in P$ ve her $v \in T_{p \cdot g^{-1}}(P)$ için $\omega_p\left(\left(\sigma_g\right)_{\star p \cdot g^{-1}}(v)\right) = g^{-1} \omega_{p \cdot g^{-1}}(v) g$

ii) her $A \in \mathfrak{g}$ için $\omega(A^{\#}) = A$, yani her $A \in \mathfrak{g}$ ve her $p \in P$ için $\omega_p\left(A^{\#}(p)\right) = A$.

Teorem 1. i) $S^1 \to S^3 \to S^2$ kompleks Hopf demeti üzerinde tanımlı $\mathrm{iIm}(\mathbb{C})$ -değerli $\omega = \mathrm{iIm}(\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2)$ 1-formu bir konneksiyon formudur.

ii) $Sp(1) \to S^7 \to S^4$ kuaterniyonik Hopf demeti üzerinde tanımlı $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ -değerli $\omega = \mathrm{Im}(\bar{q}^1 dq^1 + \bar{q}^2 dq^2)$ 1-formu bir konneksiyon formudur.

Bu şekilde tanımlı konneksiyon formlarına Hopf demetleri üzerindeki doğal (kanonik) konneksiyon formları denir. Bunlar Maxwell ve Yang-Mills denklemlerinin çözümüdürler (Trautman, 1977).

2. STANDART HOPF DEMETLERİ ÜZERİNDE PARAMETRİK KONNEKSİYON AİLESİ

Şimdi birinci amacımız için aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 2. *r, s keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere;*

i) $\mathrm{iIm}(\mathbb{C})$ *–değerli*

$$\eta = \mathrm{iIm}\left(\frac{|z^1|^r \bar{z}^1 dz^1 + |z^2|^s \bar{z}^2 dz^2}{|z^1|^{r+2} + |z^2|^{s+2}}\right) \tag{1}$$

1-formu $S^1 \to S^3 \to S^2$ kompleks Hopf demeti üzerinde bir konneksiyon formudur.

ii) $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ *–değerli*

$$\eta = \mathrm{Im}\left(\frac{|q^1|^r \bar{q}^1 dq^1 + |q^2|^s \bar{q}^2 dq^2}{|q^1|^{r+2} + |q^2|^{s+2}}\right) \tag{2}$$

1-formu $Sp(1) \to S^7 \to S^4$ kuaterniyonik Hopf demeti üzerinde bir konneksiyon formudur.

Bu teoremde verilen konneksiyon formları ailesini yüksek boyutlu Hopf demetleri üzerine genellemek mümkündür.

3. YÜKSEK BOYUTLU HOPF DEMETLERİ ÜZERİNDE KONNEKSİYONLAR

Şimdi de $U(1) \to S^3 \to \mathbb{C}P^1$ ve $Sp(1) \to S^7 \to \mathbb{H}P^1$ Hopf demetleri üzerindeki $\mathrm{iIm}(\bar{z}^1 \mathrm{dz}^1 + \bar{z}^2 \mathrm{dz}^2)$ ve $\mathrm{Im}(\bar{q}^1 \mathrm{dq}^1 + \bar{q}^2 \mathrm{dq}^2)$ doğal konneksiyon formlarından hareketle $U(1) \to S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ genel kompleks Hopf demeti ve $Sp(1) \to S^{4n-1} \to \mathbb{H}P^{n-1}$ genel kuaterniyonik Hopf demeti üzerinde (genelleştirilmiş) konneksiyon formlarını elde edelim. Burada

$$S^{2n-1} = \{(z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n : |z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 = 1\} \tag{3}$$

ve

$$S^{4n-1} = \{(q^1, \dots, q^n) \in \mathbb{H}^n : |q^1|^2 + \dots + |q^n|^2 = 1\}, \tag{4}$$

$2n - 1$ ve $4n - 1$

boyutlu kürelerdir. $\mathbb{C}P^{n-1}$ kompleks projektif uzay ve $\mathbb{H}P^{n-1}$ kuaterniyonik projektif uzaydır. Kuaterniyonik Hopf demeti üzerindeki 1-form adayımızı şu şekilde tanımlayalım (kompleks durum benzer şekilde tanımlanır):

S^7 üzerindeki $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ –değerli $\mathrm{Im}(\bar{q}^1 \mathrm{dq}^1 + \bar{q}^2 \mathrm{dq}^2)$ konneksiyon formu için yapılanlarda olduğu gibi, $p = (p^1, \ldots, p^n) \in S^{4n-1} \subseteq \mathbb{H}^n$ noktası için, $\mathbf{v} = (\mathbf{v^1}, \ldots, \mathbf{v^n}) \in T_p(S^{4n-1}) \subseteq T_p(\mathbb{H}^n) = T_{p^1}(\mathbb{H}) \times \cdots \times T_{p^n}(\mathbb{H})$ şeklinde yazılarak, $T_{p^i}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{H}$ kanonik izomorfizmi altında $\mathbf{v} = (\mathbf{v^1}, \ldots, \mathbf{v^n})$ tanjant vektörü ile bir $v = (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{H}^n$ vektörü eş tutulabilir. Bu durumda $dq^i(\mathbf{v^1}, \ldots, \mathbf{v^n}) = v^i$ dir. $Sp(1)$'in S^{4n-1} üzerine sağ etkisi

$$\sigma: S^{4n-1} \times Sp(1) \to S^{4n-1}, \qquad \sigma\big((p^1, \ldots, p^n), g\big) = (p^1, \ldots, p^n) \cdot g = (p^1 g, \ldots, p^n g)$$

*o*lmak üzere her bir $A \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ (ve σ) nın belirlediği S^{4n-1} üzerindeki temel vektör alanı, her bir $p \in S^{4n-1}$ için

$$A^{\#}(p) = \frac{d}{dt}(p \cdot \exp(tA))\Big|_{t=0} \tag{5}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu durumda $A^{\#}(p) = (p^1 A, \ldots, p^n A)$ şeklindedir. Daha fazla detay (Naber, 1997; Ergen, 2008) de mevcuttur.

Şimdi de elde edilmiş olan son iki konneksiyon formunu kullanarak yüksek boyutlu Hopf demetleri üzerinde parametrik konneksiyon aileleri elde edelim:

Teorem 3. *n pozitif tamsayı ve $l_1, l_2, \ldots, l_n$ keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere;*

i) $\mathrm{iIm}(\mathbb{C})$ *-değerli*

$$\eta = \mathrm{iIm}\left(\frac{|z^1|^{l_1} \bar{z}^1 dz^1 + |z^2|^{l_2} \bar{z}^2 dz^2 + \cdots + |z^n|^{l_n} \bar{z}^n dz^n}{|z^1|^{l_1+2} + |z^2|^{l_2+2} + \cdots + |z^n|^{l_n+2}}\right) \tag{6}$$

1-formu $U(1) \to S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ kompleks Hopf demeti üzerinde bir konneksiyon formudur.

ii) $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ *-değerli*

$$\eta = \mathrm{Im}\left(\frac{|q^1|^{l_1} \bar{q}^1 dq^1 + |q^2|^{l_2} \bar{q}^2 dq^2 + \cdots + |q^n|^{l_n} \bar{q}^n dq^n}{|q^1|^{l_1+2} + |q^2|^{l_2+2} + \cdots + |q^n|^{l_n+2}}\right) \tag{7}$$

1-formu $Sp(1) \to S^{4n-1} \to \mathbb{H}P^{n-1}$ kuaterniyonik Hopf demeti üzerinde bir konneksiyon formudur.

İspat: Teoremin (ii) kısmını ispatlayalım, (i) kısmının ispatı benzer şekilde yapılır. (ii)-yi ispatlamak için $\eta = \mathrm{Im}\left(\frac{|q^1|^{l_1} \bar{q}^1 dq^1 + |q^2|^{l_2} \bar{q}^2 dq^2 + \cdots + |q^n|^{l_n} \bar{q}^n dq^n}{|q^1|^{l_1+2} + |q^2|^{l_2+2} + \cdots + |q^n|^{l_n+2}}\right)$ formunun tanımda belirtilen konneksiyon olma koşullarını sağladığını göstermeliyiz.

1. $g \in Sp(1)$, $p = (p^1, \ldots, p^n) \in S^{4n-1}$ keyfi noktaları ve $\mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^n) \in T_{p \cdot g^{-1}}(S^{4n-1})$ vektörü için

$$(\sigma_g)_{*p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) = (v^1 g, \ldots, v^n g) \tag{8}$$

olduğundan

$$\eta_p\left((\sigma_g)_{*p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v})\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{|p^1|^{l_1} \bar{p}^1 v^1 g + \cdots + |p^n|^{l_n} \bar{p}^n v^n g}{|p^1|^{l_1+2} + \cdots + |p^n|^{l_n+2}}\right) \tag{9}$$

olur. Diğer taraftan $g^{-1} \eta_{p \cdot g^{-1}}(\mathbf{v}) g$ ifadesi hesaplanırsa,

$$
\begin{aligned}
g^{-1}\eta_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})g &= g^{-1}\mathrm{Im}\left(\frac{|p^1g^{-1}|^{l_1}\,\overline{p^1g^{-1}}v^1+\cdots+|p^ng^{-1}|^{l_n}\,\overline{p^ng^{-1}}v^n}{|p^1g^{-1}|^{l_1+2}+\cdots+|p^ng^{-1}|^{l_n+2}}\right)g\\
&= g^{-1}\mathrm{Im}\left(\frac{|p^1\bar{g}|^{l_1}\,\overline{g^{-1}}\,\bar{p}^1v^1+\cdots+|p^n\bar{g}|^{l_n}\,\overline{g^{-1}}\,\bar{p}^nv^n}{|p^1\,\bar{g}|^{l_1+2}+\cdots+|p^n\,\bar{g}|^{l_n+2}}\right)g\\
&= g^{-1}\mathrm{Im}\left(\frac{|p^1|^{l_1}|\bar{g}|^{l_1}g\,\bar{p}^1v^1+\cdots+|p^n|^{l_n}|\bar{g}|^{l_n}g\,\bar{p}^nv^n}{|p^1|^{l_1+2}|\bar{g}|^{l_1+2}+\cdots+|p^n|^{l_n+2}|\bar{g}|^{l_n+2}}\right)g\\
&= g^{-1}\mathrm{Im}\left(\frac{|p^1|^{l_1}g\,\bar{p}^1v^1+\cdots+|p^n|^{l_n}g\,\bar{p}^nv^n}{|p^1|^{l_1+2}+\cdots+|p^n|^{l_n+2}}\right)g\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{|p^1|^{l_1}\bar{p}^1v^1g+\cdots+|p^n|^{l_n}\bar{p}^nv^ng}{|p^1|^{l_1+2}+\cdots+|p^n|^{l_n+2}}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yapılan hesaplamaların sonucu olarak

$$
\eta_p\left(\left(\sigma_g\right)_{*p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})\right)=g^{-1}\eta_{p\cdot g^{-1}}(\mathbf{v})g \tag{10}
$$

eşitliği görülür.

2. Her $A\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ ve $p=(p^1,\dots,p^n)\in S^{4n-1}$ için

$$
\begin{aligned}
\eta_p\left(A^{\#}(p)\right) &= \mathrm{Im}\left(\frac{|p^1|^{l_1}\bar{p}^1(p^1A)+\cdots+|p^n|^{l_n}\bar{p}^n(p^nA)}{|p^1|^{l_1+2}+\cdots+|p^n|^{l_n+2}}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{|p^1|^{l_1}|p^1|^2A+\cdots+|p^n|^{l_n}|p^n|^2A}{|p^1|^{l_1+2}+\cdots+|p^n|^{l_n+2}}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{\left(|p^1|^{l_1}|p^1|^2+\cdots+|p^n|^{l_n}|p^n|^2\right)A}{|p^1|^{l_1+2}+\cdots+|p^n|^{l_n+2}}\right)\\
&= \mathrm{Im}(\mathrm{A})=\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

olur, yani konneksiyon olmanın ikinci şartı da sağlanır.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada kompleks ve kuaterniyonik Hopf demetleri üzerinde parametreye bağlı yeni konneksiyonlar ailesi verilmiştir. $Sp(1)\to S^7\to S^4$ standart Hopf demeti üzerindeki kanonik $\omega=\mathrm{Im}(\bar{q}^1\mathrm{dq}^1+\bar{q}^2\mathrm{dq}^2)$ konneksiyon formuna karşılık gelen $\mathcal{F}$ ayar alanlarının anti-self dual olduğu bilinmektedir (Naber, 1997). Aynı demet üzerinde elde edilmiş olan $\eta=\mathrm{Im}\left(\frac{|q^1|^r\,\bar{q}^1dq^1+|q^2|^s\,\bar{q}^2dq^2}{|q^1|^{r+2}+|q^2|^{s+2}}\right)$ konneksiyon 1-formuna karşılık gelen $\mathcal{F}$ ayar alanlarının anti-self dual olup olmadığının araştırılması açık bir problemdir. Benzer şekilde yüksek boyutlu Hopf demetleri üzerinde elde edilmiş olan konneksiyon formlarının $\mathcal{F}$ ayar alanlarının da genelleştirilmiş manada anti-self dual veya self-dual (Bilge, 1997; Corrigan, 1983) olup olmadığının araştırılması da ilginç bir problemdir.

KAYNAKLAR

Bilge, A.H., Dereli, T. ve Koçak, Ş. (1997). The Geometry of Self-Dual 2-Forms. *Journal of Mathematical Physics 38(9)*, 4804-4814.

Corrigan, E., Devchand, C., Fairlie, D. ve Nuyts, J. (1983). First-order equations for gauge fields in space of dimension greater than four. *Nuclear Physics B, 214(3)*.

Ergen, M. (2008). *Hopf Demetleri Üzerinde Konneksiyon ve Eğrilik Formları.* Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü (Yüksek Lisans Tezi).

Naber, G.L. (1997). *Topology, Geometry, and Gauge Fields: Foundations.* New York: Springer.

Nakahara, M. (1990). *Topology, Geometry and Physics.* Taylor&Francis.

Trautman, A. (1977). Solution of the Maxwell and Yang-Mills Equations Associated with Hopf Fiberings. *International J. Theoretical Physics 16(8)*, 561-565.