

DEĞİŞKEN KESİTLİ KİRİŞLERİN GENEL SINIR ŞARTLARI İÇİN TİTREŞİM ANALİZİ

Vedat TAŞKIN¹, İsmail VARSERİN², Pınar Aydan DEMİRHAN^{1*}

¹Makine Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Trakya Üniversitesi, Edirne, TÜRKİYE

²Fen Bilimleri Enstitüsü, Trakya Üniversitesi, Edirne, TÜRKİYE

Makale Künye Bilgisi:

Taşkın V., Varserin İ., Demirhan P.A. (2021). Değişken Kesitli Kirişlerin Genel Sınır Şartları İçin Titreşim Analizi, *Trakya Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 22(2), 73-86.

Öne Çıkanlar

- Mühendislik uygulamalarında farklı geometrilere ve farklı yapısal özelliklere sahip kirişler sıklıkla kullanılmaktadır.
- Dinamik yük altındaki makine elemanları veya yapılar için doğal frekanslar ve mod şekilleri önemli parametrelerdir.
- Değişken kesitli izotropik kirişin titreşim davranışı incelendiğinde, kirişin eğimindeki değişimin titreşim frekansını ve mod şekillerini etkilediği görülmektedir.

Makale Bilgileri	Öz
Makale Tarihi: Geliş: 14 Aralık 2021 Kabul: 21 Aralık 2021	Bu çalışmada değişken kesitli izotropik kirişin serbest titreşimi incelenmiştir. Seçilen kiriş genişliği üstel olarak değişken olduğundan yönetici denklemler uzay koordinatlarında benzer kesit geometrileri için adi diferansiyel denklemler haline indirgenmiştir. Kiriş titreşimine ait analitik çözümler ankastre, basit mesnetli ve serbest uçlu olmak üzere bütün sınır koşulları için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Mod şekilleri ve doğal frekanslar her bir sınır şartı için bulunmuştur. Sonuçlar kiriş kesitindeki değişimin mod şekillerini ve doğal frekansları etkilediğini göstermektedir. Titreşimin frekansı genişleyen kesitlerde artmakta daralan kesitlerde ise azalmaktadır.
Anahtar Kelimeler: Kiriş; Titreşim; Değişken Kesit; Mod Şekilleri; Doğal Frekanslar.	

VIBRATION ANALYSIS OF VARIABLE CROSS-SECTION BEAM WITH GENERAL BOUNDARY CONDITIONS

Article Info	Abstract
Article History: Received: December 14, 2021 Accepted: December 21, 2021	In this study, the free vibration of an isotropic beam with variable cross-section is investigated. Since the selected beam width is exponentially variable, the governing equations are reduced to ordinary differential equations for similar section geometries in space coordinates. Analytical solutions for the vibration of the beam are calculated separately for all boundary conditions including cantilever, simple and free end. Mode shapes and natural frequencies have been found for each boundary condition. The results show that the change in the cross-section of the beam affects the mode shapes and natural frequencies. The frequency of the vibration increases in expanding sections and decreases in narrowing sections.
Keywords: Beam; Vibration; Variable cross-section; Mode Shapes; Natural Frequencies	

1. Giriş

Mühendislik uygulamalarında kullanılan taşıyıcı sistemler çubuk, kiriş, mil, levha, plak, kafes sistem veya kabuk şeklindedir. Bu sistemlerin farklı zorlamalar altında statik ve dinamik davranışlarının belirlenmesi, güvenli endüstriyel tasarım açısından çok önemlidir. Çeşitli mühendislik uygulamalarında kirişler yapı elemanı olarak kullanılan taşıyıcı elemanlardır. Teknolojik gelişmelerle birlikte farklı kullanım alanlarının ortaya çıkmasıyla farklı kiriş geometrilerine ve farklı yapısal özelliklerde kirişlere ihtiyaç duyulmaktadır. Farklı geometri ve yapısal özelliklere sahip bu kirişlerin mekanik özelliklerinin belirlenmesi önem teşkil etmektedir (Varserin, 2015).

Bu çalışmada ele alınan yapı kiriştir. Kirişler boyu doğrultusundaki eksenine dik kuvvetlerin etkisi altında bulunan taşıyıcı elemanlardır. Kirişler, birçok mühendislik uygulamasında yapı bileşeni olarak kullanılır ve literatürde düzgün izotropik kirişlerin çapraz titreşimi hakkında birçok araştırma yer almaktadır (Gorman, 1975). Düzgün olmayan kirişler, düzgün kirişlere oranla kütle ve kuvvetin daha iyi ya da uygun şekilde dağılmasını sağlayabilir, dolayısıyla mimari, robot teknolojisi, havacılık ve diğer yenilikçi mühendislik uygulamalarındaki özel işlevsel gereklilikleri sağlayabilir. Düzgün kirişler, çeşitli çalışmaların konusunu oluşturur. Cranch ve Adler (1956), dört çeşit dikdörtgen en kesiti bulunan serbest düzgün olmayan kirişlerin doğal frekansları ve mod şekilleri için (Bessel fonksiyonları ve/veya kuvvet serileri açısından) kapalı yapıda çözümler sunmuştur. Conway ve Dubil (1965), kesik koni kirişleri için benzer kapalı yapı çözümleri elde etmiştir. Heidebrecht (1967), Fourier sinüs serilerini kullanarak frekans denkleminde benzer olmayan destekli kirişlerin ortalama doğal frekanslarını ve mod şekillerini belirlemiştir. Branch (1968), ikincil alan momentinin lineer olarak alanla bağlantılı olmasını sağlayacak şekilde farklılık göstermesine izin verilen değişken en kesiti bulunan kirişlerin enine salınımının temel

frekansını optimize etmiştir. Mabie ve Rogers (1972), kirişin en kesit alanının çok terimli değişimini ve eylemsizlik momentini dikkate alarak, ikili konik kirişin doğal frekansını elde etmiştir. Bailey (1978), düzgün olmayan dirsekli kirişin doğal frekansını elde etmek amacıyla Hamilton Yasası'ndan elde edilen frekans denklemini sayısal olarak çözmüştür.

Olhoff ve Parbery (1984), iki bitişik doğal frekans arasındaki farkı maksimize etmek için tasarım değişkeni olarak en kesit alanını kullanmıştır. Gupta (1985), sonlu eleman yöntemini kullanmak suretiyle konik kirişlerin doğal frekansını ve mod şeklini sayısal olarak tespit etmiştir. Jategaonkar ve Chehil (1989), uzunlukları boyunca sürekli ve süreksiz olarak farklılık gösteren en kesitli düzgün olmayan kirişler üzerine çalışmalar yapmıştır. Naguleswaran (1992, 1994a), Frobenius yöntemine dayalı doğrudan mod şekli çözümüyle tekli konik kirişlerin ve ikili konik kirişlerin ortalama doğal titreşimlerini tespit etmiştir. Naguleswaran (1994b), ayrıca bir kenarı eksenel koordinatın karekökü kadar farklılık gösteren düzgün kirişin dikdörtgen en kesitini incelemiştir. Laura ve ekibi (1996), genişliği sabit olan ve kalınlığı çift doğrusal olarak farklılık gösteren Bernoulli kirişlerinin doğal frekansını belirlemek için ortalama sayısal yaklaşımlardan faydalanmıştır. Datta ve Sil (1996), genişliği sabit olan ve derinliği doğrusal olarak farklılık gösteren konsol kirişlerinin doğal frekansını sayısal olarak belirlemiştir. Caruntu (2000), dikdörtgen en kesitli kirişlerin doğrusal olmayan titreşimlerini ve parabolik kalınlık değişimini incelemiştir. Yakın zamanda, Elishakoff ve Johnson (2005), eksenel olarak düzgün olmayan malzeme özellikleri bulunan bir kirişin titreşim sorunlarını irdelemiştir. Jang ve Bert (1989a, 1989b) ile Elishakoff (2005), kademeli kirişlerin serbest titreşimine ilgi göstermiş ve bu konuda kapsamlı incelemelerde bulunmuşlardır. Ece, Aydoğdu ve Taşkın (2007), en kesiti sürekli değişen izotropik kirişlerin doğal frekanslarını ve mod şekillerini (ilk 5 mod) 3 sınır şartı için (ankastre-

ankastre, basit mesnet-basit mesnet, ankastre-serbest uç) incelemiştir. Aydoğdu ve Filiz (2010) kesiti parçalı ve sürekli değişen kiriş ve çubukların serbest titreşim analizini Ritz metodunu kullanarak yapmışlardır. Akgöz ve Civalak (2013) malzeme özellikleri ve kesiti değişen Euler-Bernoulli kirişin serbest titreşim analizini Modifiye Birleşik Gerilme Teorisi'ni kullanarak yapmıştır. Mirzabeigy (2014) Diferansiyel Transform metodunu kullanarak elastik temele oturtulmuş değişken kesitli kirişin serbest titreşim analizini yapmıştır. Çalım (2016) değişken kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko kirişlerin serbest titreşim analizini Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi kullanarak yapmıştır. Khaniki ve Hashemi (2017) değişken kesitli üniform olmayan mikro kirişlerin serbest titreşimi için bir analitik çözüm sunmuştur. Çalım (2017) dönel atalet ve kayma deformasyonlarının etkisini de hesaba katarak aksel fonksiyonel derecelendirilmiş değişken kesitli Timoshenko kirişin titreşim analizini yapmıştır. Sohani ve Eipakchi (2018) pertürbasyon tekniğini kullanarak değişken kesitli Timoshenko ve Euler-Bernoulli kirişlerin serbest titreşim analizini yapmıştır. Sınır vd. (2018) pertürbasyon ve diferansiyel kareleme metodlarını kullanarak değişken kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş Euler-Bernoulli kirişin serbest ve zorlanmış titreşim analizini sunmuşlardır. Demir (2018) sıcaklığa bağlı olarak malzeme özellikleri değişen, değişken kesitli bir çubuğun titreşim analizini yapmıştır. Lohar vd. (2016) elastik zemine oturtulmuş değişken kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşimi için yarı analitik bir yöntem kullanmıştır. Soltani ve Asgarian (2019) Winkler-Pasternak elastik zemine oturtulmuş değişken kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin serbest titreşim ve stabilite analizini yeni bir hibrit yaklaşım kullanarak yapmıştır. Ghannadiasl (2019) elastik zemine oturtulmuş üniform olmayan Timoshenko kirişin serbest titreşim analizini yapmıştır.

Dinamik yük altındaki makine elemanları veya yapılar için doğal frekanslar ve mod şekilleri önemli parametrelerdir. Bir makine elemanı veya bir yapının tasarlanırken doğal frekansları ile mod şekillerinin ve dolayısıyla titreşimin genliğinin bilinmesiyle bu karakteristikler istenen sınırların dışında ise makine elemanının tasarımı değiştirilerek karakteristiklerin istenen sınırların içinde kalması sağlanabilir.

Önceki çalışmalarda, en kesiti sürekli değişen izotropik kirişlerin titreşim karakteristiklerinin önemli özellikleri olduğu ve Ece, Aydoğdu ve Taşkın (2007) tarafından kısmi olarak incelendiği görülmektedir. Mevcut çalışmada, genişliği üstel olarak farklılık gösteren izotropik kirişin serbest titreşimi tüm sınır şartları için incelenmiştir.

Çalışmanın amacı, kirişin bütün sınır koşulları için titreşim davranışını tanımlayan analitik çözümler elde etmek ve sürekli değişen en kesitin doğal frekans ile mod şekilleri üzerindeki etkilerini tespit etmektir.

2. Analiz

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda değişken kesitli izotropik kirişe ait yönetici denklemlerin elde edilmesi, ikinci kısımda ise bu denklemlere ait katsayıların her bir sınır şartı için belirlenmesi yer almaktadır.

2.1. Yönetici Denklemlerin Elde Edilmesi

Kirişlere ait en temel teori Euler-Bernoulli teorisidir. Kirişlere ait hareket denkleminin elde edilmesi için küçük bir kiriş parçası seçilerek hesaplamalar yapılır.

Kiriş kesitinin dönmesi, kiriş ötelenmesine göre çok küçük bir değer olduğundan kesitin dönmesi ihmal edilir. Aynı şekilde kayma deformasyonuna oranla çok küçük olduğundan açılma burulma da ihmal edilir (Şekil 1).

Kirişin orta ekseninin yer değiştirmesi w olmak koşulu ile düzlem parçalarının, kiriş orta kısmına göre düzlem

olarak kaldığı varsayılarak, kesit alanındaki herhangi bir noktanın yer değiştirme bileşenleri şu şekilde ifade edilebilir.

$$u = -z \frac{dw(x,t)}{dx}, v = 0, w = w(x,t) \quad (1)$$

Yer değiştirmeler çok küçük olduğu için $\tan \alpha \approx \alpha$ kabul edilebilir.

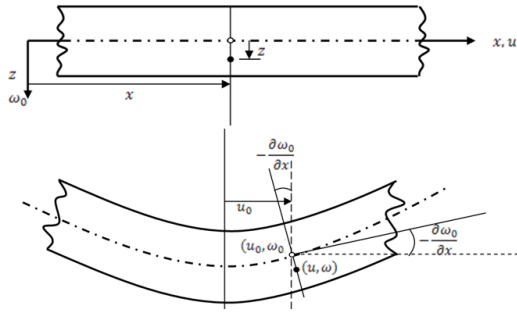
Bu yer değiştirmelere göre gerilme ve deformasyon bileşenleri şu şekildedir.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \quad (3)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{du}{dx} = -EZ \frac{d^2w}{dx^2} \quad (4)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \quad (5)$$



Şekil 1. Şekil değişikliği altında kirişe ait yer değiştirmeler (Demirhan, 2016)

Gerilme enerjisi şu şekilde yazılabilir;

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} \\ &\quad + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_{yz}\varepsilon_{yz} \\ &\quad + \sigma_{zx}\varepsilon_{zx}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (6)$$

Kinetik enerji şu şekilde yazılabilir;

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l \iint_A \rho \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dA(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho A(x) \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (7)$$

Enine yük $f(x,t)$ tarafından yapılan iş;

$$W = \int_0^l f(x,t)w(x,t)dx \quad (8)$$

Hamilton Prensipleri'ne göre;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi - T - W) dt = 0 \quad (9)$$

Burada δ , t_1 ve t_2 anları arasındaki varyasyondur.

Denklem 6, 7 ve 8 Denklem 9'da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^l \rho A(x) \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx \right. \\ \left. - \int_0^l f(x,t)w(x,t)dx \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Denklem 10 düzenlenerek kirişe ait enine titreşim denklemleri elde edilir.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2w}{dx^2} \right) + \rho A(x) \frac{d^2w}{dt^2} = f(x,t) \quad (11)$$

Değişken kesitli izotropik kiriş için boyutsuzlaştırılmış değişken parametreleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI_0^*}{\rho A_0^*}} t^*, x = \frac{x^*}{L}, I = \frac{I^*}{I_0^*}, w \\ &= \frac{w^*}{W}, A = \frac{A^*}{A_0^*} \end{aligned} \quad (12)$$

Burada t zaman, L kirişin boyu, E kirişin elastisite modülü, A_0 ve I_0 $x=0$ konumdaki (yani kirişin sol ucundaki) kesit alanı ve atalet momenti, w herhangi bir referans uzaklık, ρ kirişin yoğunluğu ve x kirişin sol ucuna olan uzaklık şeklinde tanımlanmaktadır. “*” işaretleri ait olduğu simgelerin boyutsuz haldeki değerlerini ifade etmektedir.

Mevcut çalışmada E ve ρ sabit olup serbest titreşim inceleneceği için $f(x,t)=0$ olacaktır. Buna göre Denklem 11 çözümlerse;

$$\frac{I(x)}{A(x)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{I'(x)}{A(x)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{I''(x)}{A(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (13)$$

Boyutsuz formda yönetici denklem elde edilir.

Denklem 11'in çözümü şu şekilde kabul edilebilir:

$$w(x,t) = F(x)G(t) \quad (14)$$

Denklem 13 ve Denklem 14'ün toplamı iki tane diferansiyel denklem takımından oluşur.

$$\frac{I(x)}{A(x)} F^{(4)} + 2 \frac{I'(x)}{A(x)} F''' + \frac{I''(x)}{A(x)} F'' - \omega^2 F = 0 \quad (15)$$

$$G'' + \omega^2 G = 0 \quad (16)$$

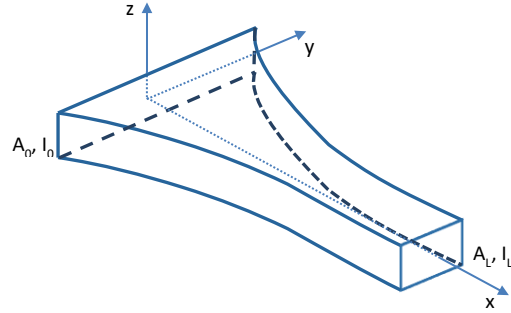
Burada ω gerçek sabittir ve $\omega^2 = (\Omega^2 \rho L^4 / EI_0)$ şeklinde tanımlanır. Ω radyal frekanstır.

Denklem 16'nın çözümü bilindiği üzere şu şekilde yazılır:

$$G(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \quad (17)$$

Denklem 15'in çözümü için kirişin kesit geometrisinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada hem kesit alanı hem de atalet momenti, genişliğin karakteristiği ile doğru orantılı olacak şekilde ele alınmıştır. Kirişin yüksekliği ve kalınlığına ait karakteristik özellikler sabit alınıp, genişliğe ait karakteristik özelliğin kirişin

uzunluğu boyunca üstel olarak değiştiği varsayılmıştır (Şekil 2).



Şekil 2. Genişliği üstel olarak değişen kirişin şematik gösterimi

Böylece $A(x) = e^{\delta x}$ ve $I(x) = e^{\delta x}$ şeklinde ifade edilir. Burada δ eğrilik parametresidir.

$$\frac{e^{\delta x}}{e^{\delta x}} F^{(4)} + 2 \frac{\delta e^{\delta x}}{e^{\delta x}} F''' + \frac{\delta^2 e^{\delta x}}{e^{\delta x}} F'' - \omega^2 F = 0 \quad (18)$$

Düzenlenirse:

$$F^{(4)} + 2\delta F''' + \delta^2 F'' - \omega^2 F = 0 \quad (19)$$

Denklem 19'un çözümü şu şekilde elde edilir:

$$F(x) = e^{-\frac{\delta}{2}x} \left[A_0 \cos\left(\frac{\beta}{2}x\right) + B_0 \sin\left(\frac{\beta}{2}x\right) + C_0 \cosh\left(\frac{\alpha}{2}x\right) + D_0 \sinh\left(\frac{\alpha}{2}x\right) \right] \quad (20)$$

Burada: $\beta = \sqrt{4\omega_0 - \delta^2}$, $\alpha = \sqrt{4\omega_0 + \delta^2}$ 'dır.

Denklem 20 yönetici denklemdir. Sınır koşulları bu denklem üzerinden uygulanarak gerekli sınır şartlarına ait sabitlerin bulunmasıyla serbest titreşim denklemleri her bir sınır koşulu için elde edilir.

Bu çalışmada kiriş mesnet çeşitleri basit(B), ankastre(A) ve serbest(S) olarak ele alınmıştır. Bu sınır koşullarının kombinasyonları olan 6 çeşit sınır şartı için

katsayıların bulunmasına ilişkin çözümler aşağıdaki şekildedir.

2.2. Yönetici denklemlerin sınır koşullarında uygulanması ve katsayıların elde edilmesi

Ankastre-Ankastre Sınır Koşulları (A-A)

$$F(0) = 0 \quad F'(0) = 0 \quad (\text{sol mesnet})$$

$$F(1) = 0 \quad F'(1) = 0 \quad (\text{sağ mesnet})$$

A-A sınır koşulu için titreşim denklemini aşağıdaki gibi elde edilir. $cc = \cos(\beta/2)$ ve $ss = \sin(\beta/2)$ olmak üzere,

$$\left[e^{\alpha} \cdot [\alpha \cdot \beta \cdot cc - \delta^2 \cdot ss] - 2 \cdot e^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta \cdot cc + \delta^2 \cdot ss \right] = 0 \quad (21)$$

Ankastre-Basit Sınır Koşulları (A-B)

$$F(0) = 0 \quad F'(0) = 0 \quad (\text{sol mesnet})$$

$$F(1) = 0 \quad F''(1) = 0 \quad (\text{sağ mesnet})$$

A-B sınır koşulu için titreşim denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[e^{\alpha} \cdot [\beta \cdot (\delta \cdot \alpha - 2 \cdot \omega_0) \cdot cc + (2 \cdot \omega_0 \cdot \alpha - \delta^3) \cdot ss] - 2 \cdot \delta \cdot e^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \alpha \cdot \beta + \beta \cdot (\delta \cdot \alpha + 2 \cdot \omega_0) \cdot cc + (2 \cdot \omega_0 \cdot \alpha + \delta^3) \cdot ss \right] = 0 \quad (22)$$

Ankastre-Serbest Sınır Koşulları (A-S)

$$F(0) = 0 \quad F'(0) = 0 \quad (\text{sol mesnet})$$

$$F''(1) = 0 \quad F'''(1) = 0 \quad (\text{sağ mesnet})$$

A-S sınır koşulu için titreşim denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[8 \cdot \omega_0 \cdot e^{\alpha} \cdot [(\alpha - 2 \cdot \delta) \cdot \beta \cdot cc + \delta \cdot (3 \cdot \delta - 2 \cdot \alpha) \cdot ss] + e^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot ((\alpha + \delta)^2 \cdot (-\delta \cdot \alpha + \delta^2 + 2 \cdot \omega_0) + 8 \cdot \omega_0) - (\alpha + \right. \quad (23)$$

$$\left. \delta)^2 \cdot [\beta \cdot ((\delta^2 - \omega_0) \cdot \alpha - \delta^3) \cdot cc - \delta \cdot (\beta \cdot \alpha - \delta^3 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0) \cdot ss] \right] = 0$$

Basit-Basit Sınır Koşulları (B-B)

$$F(0) = 0 \quad F''(0) = 0 \quad (\text{sol mesnet})$$

$$F(1) = 0 \quad F''(1) = 0 \quad (\text{sağ mesnet})$$

B-B sınır koşulu için titreşim denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[e^{\alpha} \cdot [\delta^2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot cc + (8 \cdot \omega_0^2 - \delta^4) \cdot ss] - 2 \cdot \delta^2 \cdot e^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \alpha \cdot \beta + \delta^2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot cc + (\delta^4 - 8 \cdot \omega_0^2) \cdot ss \right] = 0 \quad (24)$$

Basit-Serbest Sınır Koşulları (B-S)

$$F(0) = 0 \quad F''(0) = 0 \quad (\text{sol mesnet})$$

$$F''(1) = 0 \quad F'''(1) = 0 \quad (\text{sağ mesnet})$$

B-S sınır koşulu için titreşim denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} & e^{\alpha} \cdot (\alpha - \delta)^2 \cdot [\beta \cdot (2 \cdot \alpha^3 \cdot \delta + \alpha^2 \cdot (5 \cdot \delta^2 - \beta^2) + 2 \cdot \alpha \cdot \delta \cdot (2 \cdot \delta^2 - \beta^2) - \beta^2 \cdot (\beta^2 + 3 \cdot \delta^2)) \cdot cc + (\alpha^3 \cdot (\beta^2 - \delta^2) + 2 \cdot \alpha^2 \cdot \delta \cdot (2 \cdot \beta^2 - \delta^2) + \alpha \cdot \beta^2 \cdot (\beta^2 + 7 \cdot \delta^2) + 2 \cdot \beta^2 \cdot \delta^3) \cdot ss] - \\ & 4 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \delta \cdot e^{\frac{\alpha}{2}} \cdot (\alpha^4 - 2 \cdot \alpha^2 \cdot \delta^2 + \beta^4 + 2 \cdot \beta^2 \cdot \delta^2 + 2 \cdot \delta^4) + (\alpha + \delta)^2 \cdot [\beta \cdot (2 \cdot \alpha^3 \cdot \delta + \alpha^2 \cdot (\beta^2 - 5 \cdot \delta^2) + 2 \cdot \alpha \cdot \delta \cdot (2 \cdot \delta^2 - \beta^2) + \beta^2 \cdot (\beta^2 + 3 \cdot \delta^2)) \cdot cc + (\alpha^3 \cdot (\beta^2 - \delta^2) + 2 \cdot \alpha^2 \cdot \delta \cdot (\delta^2 - 2 \cdot \beta^2) + \alpha \cdot \beta^2 \cdot (\beta^2 + 7 \cdot \alpha^2) - 2 \cdot \beta^2 \cdot \delta^3) \cdot ss] = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Serbest-Serbest Sınır Koşulları (S-S)

$$F''(0) = 0 \quad F'''(0) = 0 \quad (\text{sol mesnet})$$

$$F''(1) = 0 \quad F'''(1) = 0 \quad (\text{sağ mesnet})$$

S-S sınır koşulu için titreşim denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[e^{\alpha} \cdot [\alpha \cdot \beta \cdot cc - \delta^2 \cdot ss] - 2 \cdot e^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta \cdot cc + \delta^2 \cdot ss \right] = 0 \quad (26)$$

3. Sayısal Sonuçlar

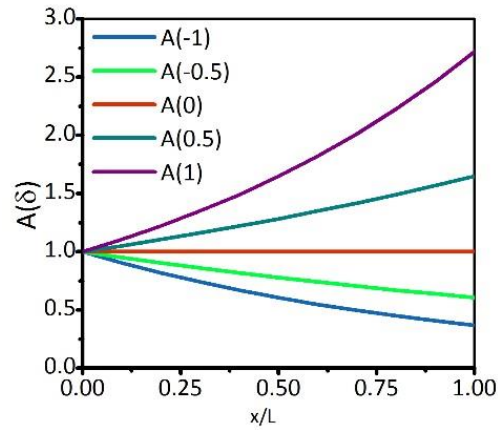
Bu bölümde genişliği üstel olarak değişen izotropik kirişin serbest titreşimi için nümerik sonuçlar sunulmuştur. Şekil 3'te kirişin kesit alanının uzunluk koordinatı boyunca üstel olarak değişimi eğrilik katsayısına bağlı olarak verilmiştir. Eğrilik katsayısı δ 'nın negatif değerleri için kiriş kesiti giderek daralırken, pozitif değerleri için kiriş kesiti genişlemektedir. Eğrilik katsayısının sıfıra eşit olduğu durum üniform kesitli kirişi temsil etmektedir. Tablo 1'de $\delta = -1$ eğrilik değeri için ilk beş titreşim modunun doğal frekansları literatürde yer alan çalışmalarla birlikte sunulmuştur. Cranch ve Adler [3] tarafından seri açılımları ile elde edilmiş yaklaşık sonuçlar, Tong ve Tabarrok [36] tarafından nümerik olarak elde edilmiş sonuçlar ile Ece, Aydoğdu ve Taşkın [22] tarafından üretilen sonuçların, sunulan çalışmanın sonuçları ile oldukça uyumlu olduğu görülmüştür.

Tablo 2'de tüm sınır şartlarına ait farklı eğrilik katsayıları (-0,5 0 0,5) ve kiriş uzunluğu boyunca farklı noktalar ($x/L=0$ 0,25 0,5 0,75 1) için frekans değerleri verilmiştir. $M(\delta)$ ilgili sınır şartına ait mod şekli için titreşim değerlerini ifade etmektedir.

Tablo 3'te her bir sınır şartı için ilk on doğal frekans değeri (0 0,5 1 -0,5 -1) eğrilik değerleri için verilmiştir. Simetrik desteklenmiş kirişlerde (AA, BB ve SS) eğrilik katsayısının işaretinin sonucu değiştirmedığı, frekans değerlerinin işaretten bağımsız olduğu görülmüştür.

Şekil 4-7'de farklı eğrilik değerleri (-0,5 0 0,5) için tüm sınır koşullarına ait 1, 2, 5 ve 8. doğal titreşim modlarının değişimi verilmiştir. Grafiklerin çiziminde frekans değerlerinin genlik derecesi 1 olacak şekilde normalizasyonu yapılmıştır. Ankastre-Ankastre (AA) desteklenmiş ve Serbest-Serbest (SS) kirişte incelenen

tüm doğal titreşim modları için işaretten bağımsız olarak eğrilik katsayısı arttıkça doğal frekans değerlerinin arttığı görülmektedir. Basit-Basit (BB) desteklenmiş kirişte işaretten bağımsız olarak eğrilik katsayısı arttıkça doğal frekans değerlerinin azaldığı görülmektedir. Ankastre-Basit (AB), Ankastre-Serbest (AS) ve Basit-Serbest (BS) desteklenmiş kirişlerde eğrilik katsayısının -1 değeri için doğal frekans değeri en büyük iken, eğrilik katsayısı arttıkça frekans değerinin düştüğü görülmüştür.



Şekil 3. Kiriş kesit alanının uzunluk boyunca eğrilik katsayısına bağlı değişimi

Tablo 1. $\delta = -1$ için doğal frekanslar

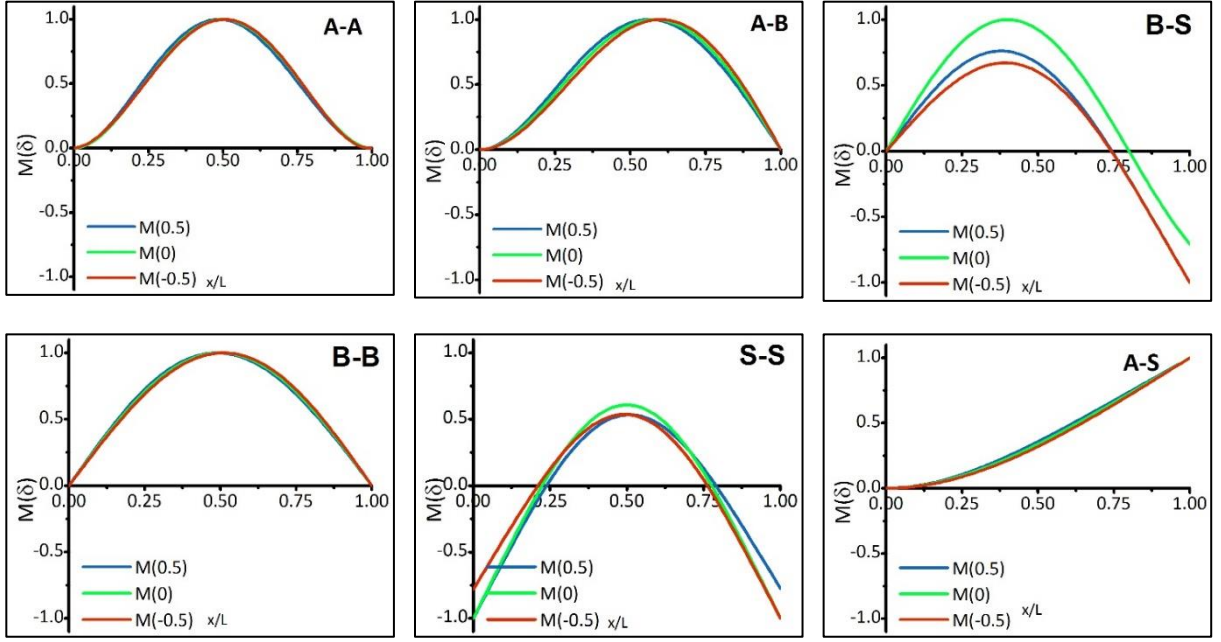
Sınır Koşulu	Referans	1.mod	2.mod	3.mod	4.mod	5.mod
AS	Cranch ve Adler (1956)	4,73500	24,20250	63,85000	-	-
	Tong ve Tabarrok (1995)	4,73470	24,20050	63,86080	123,09100	-
	Ece, Aydoğdu ve Taşkın (2007)	4,72298	24,20168	63,86448	123,09790	202,06870
	Şimdiki Çalışma	4,73490	24,20181	63,86449	123,09790	202,06876
AA	Ece, Aydoğdu ve Taşkın (2007)	22,51167	61,85968	121,10799	200,07411	298,77661
	Şimdiki Çalışma	22,51168	61,85969	121,10798	200,07412	298,77662
BB	Ece, Aydoğdu ve Taşkın (2007)	9,77291	39,57036	88,97052	158,08418	246,92650
	Şimdiki Çalışma	9,77290	39,57036	88,97051	158,08417	246,92640

Tablo 2. Tüm sınır koşulları için (-0,5 0 0,5) eğrilik değerine karşılık 1, 2, 5 ve 8. modları için doğal frekans değerleri

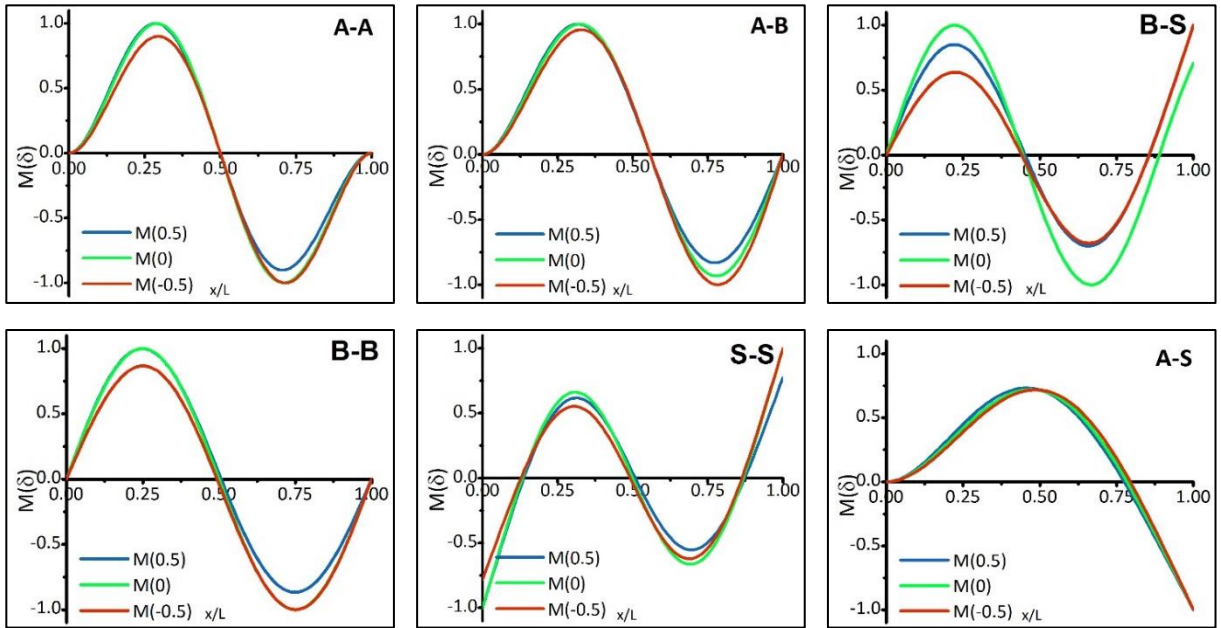
Sınır Koşulu	x/L	1. Mod			2. Mod			5. Mod			8. Mod		
		M(0,5)	M(0)	M(-0,5)	M(0,5)	M(0)	M(-0,5)	M(0,5)	M(0)	M(-0,5)	M(0,5)	M(0)	M(-0,5)
AA	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,25	0,77834	0,82909	0,93222	1,35515	1,44373	1,53559	-0,49544	-0,52789	-0,56140	-0,50751	-0,53994	-0,57508
	0,50	1,42551	1,61505	1,82750	0,00191	0,00000	0,00245	1,24822	1,41457	1,60275	-0,00068	0,00000	-0,00087
	0,75	0,77150	0,92746	1,06089	-1,19689	-1,44373	-1,74147	-0,43897	-0,52789	-0,63870	0,44670	0,53994	0,64995
	1,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
AB	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,25	0,60747	0,64971	0,68835	1,26370	1,34669	1,43196	-0,24349	-0,25971	-0,27591	-0,73690	-0,78416	-0,83502
	0,50	1,26875	1,44373	1,62911	0,50492	0,57035	0,64833	1,15274	1,30683	1,48015	-0,47822	-0,54119	-0,61405
	0,75	1,00932	1,22054	1,46856	-1,14381	-1,38220	-1,66423	-0,97560	-1,17587	-1,41949	-0,22970	-0,27590	-0,33421
	1,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
AS	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,25	0,28486	0,26505	0,24184	0,76242	0,81939	0,87534	0,54673	0,58159	0,61953	-1,22739	-1,30648	-1,39082
	0,50	0,95447	0,92501	0,87950	1,21396	1,40145	1,61127	-0,02057	-0,02202	-0,02655	-1,24790	-1,41414	-1,60233
	0,75	1,78876	1,79199	1,76385	0,16447	0,26507	0,40663	-0,39428	-0,47970	-0,57870	-1,07817	-1,30101	-1,56845
	1,00	2,65665	2,72444	2,74864	-1,69374	-1,96374	-2,24576	1,55724	1,93179	2,38549	-1,55747	-1,95955	-2,45878
BB	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,25	0,63917	0,70711	0,78072	0,94717	1,00000	1,05507	-0,65323	-0,70711	-0,76485	-0,00953	0,00000	0,01034
	0,50	0,88042	1,00000	1,13138	0,03904	0,00000	-0,04789	0,88248	1,00000	1,13317	-0,00924	0,00000	0,01068
	0,75	0,60649	0,70711	0,81983	-0,82120	-1,00000	-1,21596	-0,59654	-0,70711	-0,84010	-0,00892	0,00000	0,01097
	1,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
BS	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,25	0,73699	0,83142	0,87479	0,93672	0,98079	1,03288	-0,77282	-0,83147	-0,89419	0,17420	0,19509	0,21751
	0,50	0,74862	0,92395	0,93791	-0,28762	-0,38268	-0,45271	0,82051	0,92388	1,04045	0,32944	0,38268	0,44321
	0,75	-0,02539	0,19538	-0,04758	-0,59883	-0,83147	-0,86695	-0,18477	-0,19509	-0,23136	0,45429	0,55557	0,68024
	1,00	-1,12177	-0,70683	-1,55470	1,12142	0,70711	1,64840	-1,10723	-0,70711	-1,74619	1,10580	0,70711	1,77001
SS	0,00	-2,28738	-2,03562	-1,84250	-2,13648	-1,99845	-1,88077	-2,06004	-2,00000	-1,94415	-2,03834	-2,00000	-1,96341
	0,25	0,09324	0,20192	0,29705	1,14572	1,16859	1,19370	-0,49898	-0,55450	-0,61266	-0,54300	-0,54246	-0,54161
	0,50	1,22077	1,23729	1,26312	0,08920	0,00000	-0,09648	1,28475	1,41386	1,55692	-0,02450	0,00000	0,02861
	0,75	0,29254	0,20192	0,10287	-1,05765	-1,16859	-1,29761	-0,50733	-0,55450	-0,60711	0,43670	0,54246	0,66993
	1,00	-1,77433	-2,03562	-2,35823	1,65861	1,99845	2,40822	-1,60172	-2,00000	-2,49246	1,58577	2,00000	2,51840

Tablo 3. Tüm sınır koşullarının ilk on mod için doğal frekans değerleri

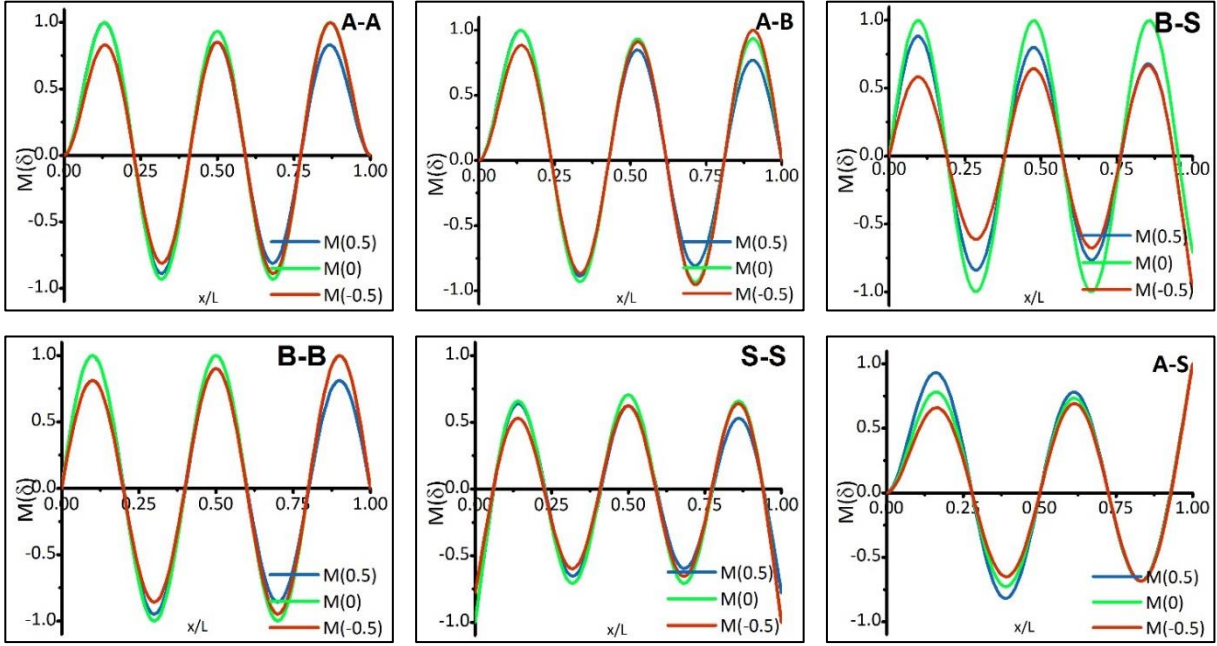
Sınır Koşulu	δ	1.mod	2.mod	3.mod	4.mod	5.mod	6.mod	7.mod	8.mod	9.mod	10.mod	
AA	0	0	22,373285	61,672823	120,903390	199,859450	298,555540	416,990790	555,165250	713,078920	890,731800	1088,123900
	0,5	0,5	22,407711	61,719503	120,954525	199,913109	298,610802	417,047165	555,222443	713,136737	890,790109	1088,182600
	1	1	22,511682	61,859697	121,107980	200,074120	298,776620	417,216310	555,394040	713,310200	890,965050	1088,358700
	-0,5	-0,5	22,407711	61,719503	120,954520	199,913110	298,610800	417,047170	555,222440	713,136740	890,790110	1088,182600
	-1	-1	22,511682	61,859697	121,107980	200,074120	298,776620	417,216310	555,394040	713,310200	890,965050	1088,358700
AB	0	0	15,418206	49,964862	104,247700	178,269730	272,030970	385,531420	518,771080	671,749950	844,468030	1036,925300
	0,5	0,5	14,894929	49,500827	103,791196	177,817860	271,581893	385,084226	518,325242	671,305133	844,024009	1036,481940
	1	1	14,378288	49,106280	103,421940	177,462370	271,234750	384,742710	517,987780	670,970730	843,692000	1036,151800
	-0,5	-0,5	15,954595	50,498568	104,791280	178,817820	272,581860	386,084200	519,325220	672,305110	845,023990	1037,481900
	-1	-1	16,511491	51,102631	105,422000	179,462070	273,234480	386,742480	519,987590	672,970570	845,691860	1038,151700
AS	0	0	3,516015	22,034492	61,697214	120,901920	199,859530	298,555530	416,990790	555,165250	713,078920	890,731800
	0,5	0,5	3,009784	21,017704	60,741347	119,950981	198,911997	297,610004	416,046600	554,222020	712,136409	889,789847
	1	1	2,565342	20,038379	59,870849	119,098630	198,069640	296,773610	415,214190	553,392450	711,308980	888,964070
	-0,5	-0,5	4,089328	23,094053	62,738229	121,950990	200,911880	299,609920	418,046530	556,221970	714,136360	891,789810
	-1	-1	4,734907	24,201813	63,864490	123,097910	202,068770	300,772930	419,213650	557,392020	715,308620	892,963780
BB	0	0	9,869604	39,478418	88,826440	157,913670	246,740110	355,305760	483,610620	631,654680	799,437960	986,960440
	0,5	0,5	9,845362	39,501309	88,862422	157,956282	246,786698	355,354997	483,661749	631,707235	799,491615	987,014983
	1	1	9,772910	39,570366	88,970523	158,084190	246,926500	355,502740	483,815160	631,864910	799,652600	987,178620
	-0,5	-0,5	9,845362	39,501309	88,862422	157,956280	246,786700	355,355000	483,661750	631,707240	799,491620	987,014980
	-1	-1	9,772910	39,570366	88,970523	158,084190	246,926500	355,502740	483,815160	631,864910	799,652600	987,178620
BS	0	0	15,418206	49,964862	104,247700	178,269730	272,030970	385,531420	518,771080	671,749950	844,468030	1036,925300
	0,5	0,5	14,894929	49,500827	103,791196	177,817860	271,581893	385,084226	518,325242	671,305133	844,024009	1036,481940
	1	1	14,378288	49,106280	103,421940	177,462370	271,234750	384,742710	517,987780	670,970730	843,692000	1036,151800
	-0,5	-0,5	15,954595	50,498568	104,791280	178,817820	272,581860	386,084200	519,325220	672,305110	845,023990	1037,481900
	-1	-1	16,511491	51,102631	105,422000	179,462070	273,234480	386,742480	519,987590	672,970570	845,691860	1038,151700
SS	0	0	21,502593	61,764887	120,895860	199,859970	298,555500	416,990790	555,165250	713,078920	890,731800	1088,123900
	0,5	0,5	21,683944	61,930980	121,063047	200,027103	298,722639	417,157927	555,332389	713,246060	890,898940	1088,291030
	1	1	22,224492	62,428704	121,564290	200,528300	299,223920	417,659250	555,833740	713,747430	891,400330	1088,792400
	-0,5	-0,5	21,683944	61,930980	121,063050	200,027100	298,722640	417,157930	555,332390	713,246060	890,898940	1088,291000
	-1	-1	22,224492	62,428704	121,564290	200,528300	299,223920	417,659250	555,833740	713,747430	891,400330	1088,792400



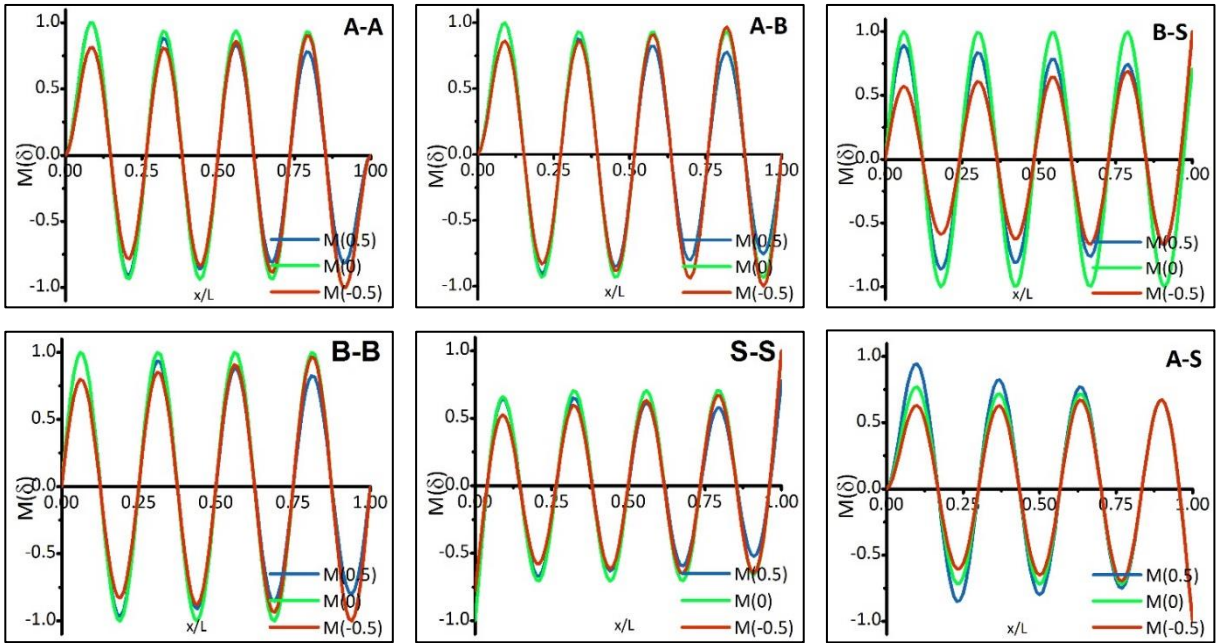
Şekil 4. Farklı eğrilik katsayıları için tüm sınır şartlarında normalize edilmiş mod şekilleri (1. mod)



Şekil 5. Farklı eğrilik katsayıları için tüm sınır şartlarında normalize edilmiş mod şekilleri (2. mod)



Şekil 6. Farklı eğrilik katsayıları için tüm sınır şartlarında normalize edilmiş mod şekilleri (5. mod)



Şekil 7. Farklı eğrilik katsayıları için tüm sınır şartlarında normalize edilmiş mod şekilleri (8. mod)

4. Sonuç

Bu çalışmada değişken kesitli izotropik kirişler ele alınmıştır. Analizde Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi kullanılmıştır. Kesit değişimi üstel olarak seçilmiştir. Kesit geometrisinden yararlanılarak yönetici denklemler belirlenmiş, bu denklemlerdeki katsayılar farklı sınır şartları için hesaplanmış ve sınır şartlarına ait titreşim değerleri hesaplanmıştır. Titreşim değerleri doğrultusunda sınır şartlarına ait birinci, ikinci, beşinci ve sekizinci mod şekilleri çizilmiştir. Bu veriler ışığında düzgün kesitli bir kirişin davranışına kıyasla sonuçlar elde edilmiştir.

Yapılan hesaplamalar sonucu sınır şartlarına ait elde edilen doğal frekanslar, daha önceden yapılmış çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılmış ve sonuçların eski çalışmalardaki sonuçlarla uyum içerisinde olduğu görülmüştür (Gorman, 1975, Elishakoff., 2005, Ece, Aydoğdu ve Taşkın, 2007).

Kiriş eğiminin artan ya da azalan olması durumunun mod şekillerini etkilediği gözlemlenmiştir. Eğrilik katsayısının pozitif olduğu (kesit kalınlığının üstel olarak arttığı durumda) durumlarda mod şekillerindeki genliğin (yani titreşim değeri) arttığı, negatif olduğu (kesit kalınlığının üstel olarak azaldığı) durumlarda ise azaldığı görülmüştür. Bu çalışma diğer yapı elemanları için (örneğin plakalar, kabuklar) ya da kompozitler veya fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler için genişletilebilir.

Kaynaklar

İ.Varserin, “Kesidi Üstel Olarak Değişen Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi” *Yüksek Lisans Tezi, Makine Mühendisliği Bölümü, Trakya Üniversitesi, Edirne, Türkiye*, 2015.

D.J. Gorman, *Free vibration analysis of beams and shafts*, 1. Baskı, New York, USA, Wiley, 1975.

E.T. Cranch, A.A. Adler, “Bending vibration of variable section beams”, *Journal of Applied Mechanics*, c. 23, s. 1, ss. 103–108, 1956.

H.D. Conway, J.F. Dobil, “Vibration frequencies of truncated-cone and wedge beams”, *Journal of Applied Mechanics*, c. 32, s.4, ss. 932–934, 1965.

A.C. Heidebrecht, “Vibration of non-uniform simply supported beams”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, c.93, s. 2, ss. 1–15, 1967.

R.M. Branch, “On the extremal fundamental frequencies of vibrating beams”, *Journal of Sound and Vibration*, c. 4, ss. 667–674, 1968.

H.H. Mabie, C.B. Rogers, “Transverse vibration of double-tapered cantilever beams”, *Journal of the Acoustical Society of America*, c. 51, s. 5, ss. 1771–1775, 1972.

C.D. Bailey, “Direct analytical solution to non-uniform beam problems”, *Journal of Sound and Vibration*, c. 56, s. 4, ss. 501–507, 1978.

N. Olhoff, R. Parbery, "Designing vibrating beams and rotating shafts for maximum difference between adjacent natural frequencies", *International Journal of Solids and Structures*, c. 20, ss. 63-75, 1984.

A.K. Gupta, “Vibration of tapered beams”, *Journal of Structural Engineering*, c. 111, s. 1, ss. 19–36, 1985.

R. Jategaonkar, D.S. Chehil, “Natural frequencies of a beam with varying section properties”, *Journal of Sound and Vibration*, c. 133, ss. 303–322, 1989.

S. Naguleswaran, “Vibration of an Euler–Bernoulli beam of constant depth and with linearly varying breadth”, *Journal of Sound and Vibration*, c. 153 s. 3, ss. 509–522, 1992.

- S. Naguleswaran, “A direct solution for the transverse vibration of Euler–Bernoulli wedge and cone beams”, *Journal of Sound and Vibration*, c. 172, s. 3, ss. 289–304, 1994a.
- Naguleswaran S. “Vibration in Two Principle Planes of a Non-uniform Beam of Rectangular Cross-Section, One Side of Which Varies as a Square Root of the Axial Coordinate”, *Journal of Sound and Vibration*, c. 172, s. 3, ss. 305-319, 1994b.
- P.A.A. Laura, R.H. Gutierrez, R.E. Rossi, “Free vibration of beams of bi-linearly varying thickness”, *Ocean Engineering*, c. 23, s. 1, ss. 1–6, 1996.
- A.K. Datta, S.N. Sil, “An analysis of free undamped vibration of beams of varying cross-section”, *Computers and Structures*, c. 59, s. 3, ss. 479–483, 1996.
- D.Caruntu, “On nonlinear vibration of non-uniform beam with rectangular cross-section and parabolic thickness variation”, *IUTAM / IFToMM Symposium on Synthesis of Nonlinear Dynamical Systems, Solid Mechanics and Its Applications*, London, ss. 109–118, 2000.
- I. Elishakoff, V. Johnson, “Apparently the first closed-form solution of vibrating inhomogeneous beam with a tip mass”, *Journal of Sound and Vibration*, c. 286, s. 4-5, ss. 1057–1066, 2005.
- S.K. Jang, C.W. Bert, “Free vibration of stepped beams”, Exact and numerical solutions. *Journal of Sound and Vibration*, c. 130, ss. 342–346, 1989a.
- S.K. Jang, C.W. Bert, “Free vibration of stepped beams: Higher mode frequencies and effects of steps on frequencies”, *Journal of Sound and Vibration*, c. 32, ss. 164–168, 1989b.
- I. Elishakoff, Eigenvalues of inhomogeneous structures: unusual closed-form solutions, CRC Press, Boca Raton, 2005.
- M.C. Ece, M. Aydoğdu, V. Taşkın, “Vibration of variable cross-section beam”, *Mechanics Research Communications*, c. 34, ss. 78-84, 2007.
- M. Aydogdu, S. Filiz, “Vibration Analysis of Piecewise and Continuously Axially Graded Rods and Beams”, *Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis*, ss. 95-145, Nova Science Publishers, Inc. 2010.
- B. Akgöz, Ö. Civalek, “Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli–Euler microbeams based on the modified couple stress theory”, *Composite Structures*, c. 98, ss. 314–322, 2013.
- A. Mirzabeigy, “Semi-analytical Approach for Free Vibration Analysis of Variable Cross-section Beams Resting on Elastic Foundation and under Axial Force”, *IJE Transactions C: Aspects*, c. 27, ss. 385-394, 2014.
- F.F. Calim, “Transient analysis of axially functionally graded Timoshenko beams with variable cross-section”, *Composites Part B*, c. 98, ss. 472-483, 2016.
- B.H. Khaniki, S.H. Hashemi, “Free Vibration Analysis of Nonuniform Microbeams Based on Modified Couple Stress Theory: an Analytical Solution”, *IJE TRANSACTIONS B: Applications*, c. 30 ss. 311-320, 2017.
- F.F. Çalım, “Değişken Kesitli Timoshenko Kirişinin Serbest Titreşim Analizi”, *Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, c. 6, s. 1, ss. 76-82, 2017.
- F. Sohani, H.R. Eipakchi, “Analytical solution for modal analysis of Euler- Bernoulli and

- Timoshenko beam with an arbitrary varying cross-section”, *Mathematical Models in Engineering*, c. 4, s. 3, 2018.
- S. Sınır, M. Çevik, B.G. Sınır, “Nonlinear free and forced vibration analyses of axially functionally graded Euler-Bernoulli beams with non-uniform cross-section”, *Composites Part B*, c. 148, ss. 123–131, 2018.
- E. Demir, “Longitudinal vibration of temperature dependent bar with variable cross-section”, *Politeknik Dergisi*, c. 21, s. 4, ss. 813-819, 2018.
- H. Lohar, A. Mitra, S. Sahoo, “Natural Frequency and Mode Shapes of Exponential Tapered AFG Beams on Elastic Foundation”, *International Frontier Science Letters*, c. 9, ss. 9-25, 2016.
- M. Soltani, B. Asgarian, “New hybrid approach for free vibration and stability analyses of axially functionally graded Euler-Bernoulli beams with variable cross-section resting on uniform Winkler-Pasternak foundation”, *Latin American Journal of Solids and Structures*, c. 16, s. 173, 2019.
- A. Ghannadial, “Natural frequencies of the elastically end restrained non-uniform Timoshenko beam using the power series method”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, c. 47, ss. 201-214, 2019.
- P.A. Demirhan, “Fonksiyonel Derecelendirilmiş Sandviç Kiriş Ve Plakların Dört Değişkenli Kayma Deformasyon Teorisi İle Eğilme Ve Titreşim Analizi”, *Doktora Tezi, Makine Mühendisliği Bölümü, Trakya Üniversitesi, Edirne, Türkiye*, 2016.
- X. Tong, B. Tabarrok, “Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section”. *Journal of Sound and Vibration*, c. 186 s. 5, ss. 821-835. 1995.