

Elastik Zemine Oturan Çapraz Tabakalı Kompozit Kalın Plakların Serbest Titreşim Analizi

Fethi KADIOĞLU*¹, Gülçin TEKİN¹, Nihan SATIR¹

¹Istanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 34469, İstanbul

(Alınış / Received: 07.12.2015, Kabul / Accepted: 05.05.2016, Online Yayınlanma / Published Online: 31.05.2016)

Anahtar Kelimeler

Serbest titreşim,
Plak-zemin etkileşim problemleri,
Tabakalı kompozit kalın plaklar,
Gâteaux diferansiyeli, Karışık sonlu eleman yöntemi

Özet: Bu çalışmada, Gâteaux diferansiyel yöntemi kullanılarak Winkler elastik zeminine oturan simetrik çapraz tabakalı kompozit kalın plakların serbest titreşim analizi için fonksiyonel elde edilmiştir. Sınır koşulları ile birlikte elde edilen fonksiyonelin çözümü için karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Yerdeğiştirme, eğilme ve burulma momentleri, dönmeler ve kesme kuvvetleri karışık sonlu eleman modelinde yer alan sekiz temel bilinmeyenlerdir. Analizlerde, tabakalı kalın plak-Winkler elastik zemin etkileşim problemleri, farklı geometri ve malzeme özellikleri ve farklı tabakalanma durumları için incelenmiştir. Fonksiyonel ve karışık sonlu eleman formülasyonunu kullanılarak elde edilen sayısal çözümlerin doğruluğu literatürdeki mevcut sayısal çözümlerin sonuçları ile karşılaştırılarak test edilmiştir. Elde edilen sonuçların uyumlu olduğu gözlenmiştir.

Free Vibration Analysis of Cross-Ply Laminated Composite Thick Plates Resting on Elastic Foundation

Keywords

Free vibration,
Plate-foundation interaction problems,
Laminated composite thick plates,
Gâteaux differential, Mixed finite element method

Abstract: In this study, a functional for the free vibration analysis of symmetric cross-ply laminated composite thick rectangular plates on Winkler's elastic foundation is obtained by using Gâteaux differential method. For the solution of the derived functional with boundary conditions, mixed finite element method is used. Mixed finite element model has eight unknowns, displacement, bending and twisting moments, rotations and shear forces. In the analyses, laminated thick plate - Winkler's elastic foundation interaction problems are considered for different geometrical and material parameters and lamination scheme. Accuracy of the presented functional and mixed finite element formulation is shown by comparing the results of numerical examples with the ones available in the literature. The results obtained in this study are found to be in good agreement.

1. Giriş

Günümüzde kompozit malzemeler, yüksek mukavemetli olmaları, korozyon dayanımlarının yüksek olması, kolay şekil alabilmeleri ve hafif olmaları gibi sağladıkları birçok avantaj nedeniyle çeşitli mühendislik dallarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Kompozit ve tabakalı kompozit malzemelerin mekanik davranışları hakkında genel bilgilerin verildiği başlıca çalışmalar [1-3] tarafından yapılmıştır.

Son yıllarda kompozit malzemeler konusunda yapılmış birçok çalışma mevcut olup bunlar genellikle plaklar, kabuklar, kemerler ve kirişler üzerinedir. Mühendislikte plakların yaygın kullanım alanına

sahip olan yapı elemanlarından biri olması, plak teorilerini ve uygulamalarını ilgi çekici araştırma konusu haline getirmiştir. Bu nedenle literatürde yer alan birçok çalışmada değişik plak teorileri geliştirilmiş ve plak problemlerinin çözümünde farklı hesap yöntemlerinin uygulanmasına yer verilmiştir. Geliştirilen çeşitli plak teorileri, klasik plak teorilerine ya da kayma deformasyonlu plak teorilerine dayanmaktadır. Klasik plak teorisinin geçerli olduğu Kirchhoff-Love ince plak teorisinde düzleme dik kayma şekil değiştirmelerinin etkisi göz ardı edilirken, kalın plak problemlerinde düzleme dik kayma şekil değiştirmelerinin etkisi de dikkate alınmaktadır (Mindlin-Reissner plak teorisi). Bu çalışmada çapraz tabakalı kompozit kalın plak-elastik

zemin etkileşim problemi Reissner plak teorisi esas alınarak incelenmiştir.

Plak-elastik zemin etkileşim problemlerine mühendislik uygulamalarında sıkça rastlanmaktadır. Elastik zemin modelleri hakkında detaylı bilgi [4-7] tarafından verilmiştir. Zeminin plak üzerindeki etkilerini yansıtabilmek için yaygın olarak Winkler zemin modellemesinden yararlanıldığı bilinmektedir. Winkler zemin modellemesi [8], Pasternak zemin modellemesindeki kayma etkilerini göz ardı ederken zemin yataklanma katsayısı, k , Winkler modelindeki zemin parametresidir.

Literatürde Winkler elastik zeminine oturan kalın plakların davranışı farklı yöntemler kullanılarak birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. [9] tarafından Winkler ve Pasternak zeminine oturan Reissner/Mindlin plaklarının dinamik yükler altındaki davranışı sınır elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. [10] çalışmalarında diferansiyel quadrature yöntemi kullanarak Winkler zeminine oturan Mindlin plaklarının statik analizini yapmışlardır. [11] Winkler elastik zeminine oturan plakların analizi için sonlu eleman yöntemini kullanmıştır. [12] Winkler elastik zeminine oturan Mindlin plaklarının eğilme analizini sonlu elemanlar yöntemi kullanarak yapmışlardır. [13] Winkler elastik zemine oturan kalın dikdörtgen plakların diferansiyel quadrature elemanlar yöntemi ile lineer statik hesabını incelemiştir.

Klasik sonlu elemanlar yöntemi ile çözümlerde kalınlık/açıklık oranının çok küçük olması durumunda "kayma kilitlenmesinin" ortaya çıkması ve gerçekte olduğundan daha rijit davranış gösteren, hatalı sonuçların elde edilmesine sık rastlanmaktadır. Kayma kilitlenmesini ortadan kaldırmak için Hellinger-Reissner ve Hu-Washizu prensiplerine dayalı değişik Karışık Sonlu Eleman formülasyonları geliştirilmiştir [14, 15]. Karışık sonlu elemanlar için varyasyonel yöntemler de kullanılmaktadır. Aköz ve çalışma grubu tarafından yapılan birçok çalışmada Gâteaux diferansiyel yöntemi kullanılarak fonksiyonel elde edilmiştir. Gâteaux diferansiyel yöntemi diğer yöntemlerle kıyaslandığında daha etkin ve güvenilir bir yöntem olup şu avantajlara sahiptir [16].

- Herhangi bir lineer ve nonlinear probleme uygulanabilir.
- Her tipte bünye bağıntısı için bu yaklaşım kullanılabilir.
- Kayma kilitlenmesi gözlenmez.
- Özellikle mühendislikte önemli olan moment değerleri bağımsız değişken olarak alındığı için doğrudan büyük bir doğrulukla elde edilebilir.
- Doğrusal interpolasyon fonksiyonunun seçilmesi sayesinde eleman denklemi açık olarak elde edilebilir.

•Problemin sınır koşulları elde edilebilir ve bütün alan denklemleri sistematik bir biçimde fonksiyonele aktarılabilir.

[17] yaptıkları çalışmada Winkler elastik zemine oturan kalın dikdörtgen elastik plakların karışık sonlu elemanlar yöntemi ile statik analizini yapmışlardır. [18] yaptıkları çalışmada Winkler ve Pasternak zeminine oturan kalın dikdörtgen elastik plakların karışık sonlu elemanlar yöntemi ile serbest titreşim analizini yapmışlardır.

Yazarların bilgisi dahilinde literatürde, Winkler elastik zeminine oturan çapraz tabakalı kompozit kalın plakların serbest titreşim analizine karşı gelen fonksiyonele ve Gâteaux diferansiyel yönteminin uygulamasına rastlanamamıştır. Bu çalışmada temel amaç, karışık sonlu elemanlar formülasyonu ile elastik zemine oturan çapraz tabakalı kompozit Reissner plaklarının serbest titreşim analizini gerçekleştirmektir. Bu amaca yönelik olarak, sınır koşulları ile birlikte ilgili fonksiyonelin elde edilmesi için Gâteaux diferansiyel yöntemi kullanılmıştır. Winkler zeminine oturan çapraz tabakalı kompozit kalın plaklar için, h en kesit yüksekliği ve $2a$ en kesit genişliği olmak üzere, farklı $2a/h$ oranlarının, farklı tabaka dizilişlerinin ve farklı malzeme özelliklerinin serbest titreşim davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

2. Elastik Zemine Oturan Çapraz Tabakalı Kompozit Kalın Plakların Alan Denklemleri

Ortotrop davranış gösteren bir tabakada düzlem gerilme durumunda malzeme koordinatlarında (1-2) gerilme-şekil değiştirme ilişkileri;

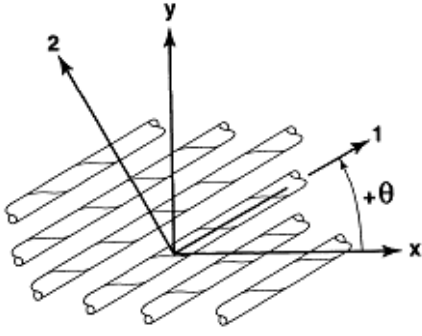
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

şekindedir. Katman elastik sabitlerinin (Q_{ij}); malzeme koordinatlarında tanımlanmış elastisite modülü (E_i), kayma modülü (G_{ij}) ve poisson oranı (μ_{ij}) cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})} ; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \quad (2)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\mu_{12}E_2}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})} ; \quad Q_{66} = G_{12}$$

Her tabaka için verilen gerilme-şekil değiştirme ilişkilerinin, malzemenin asal eksen doğrultuları ile pozitif θ açısı yapan global plak koordinatları (x-y eksenleri) doğrultusunda elde edilmesi gerekmektedir (Şekil 1).



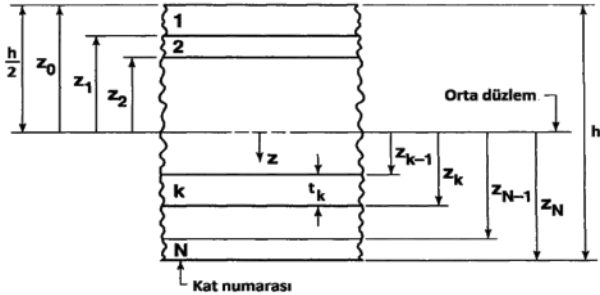
Şekil 1. Plak ve malzeme koordinatları

Bu durumda x-y eksen takımında gerilme-şekil değiştirme ilişkisi;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

şeklindedir. Dönüştürülmüş katman elastik sabitlerinin (\bar{Q}_{ij}), θ açısına bağlı olarak açık ifadeleri ise aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \end{aligned} \quad (4)$$



Şekil 2. Tabakalı plağa ait katmanların koordinat yerleşimi

Çok tabakalı bir plağın bir tabakasındaki gerilme-şekil değiştirme ilişkileri, plak koordinatlarında;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right] \quad (5)$$

şeklindedir. İç kuvvetler, kesit üzerinde gerilmelerin plak kalınlığı (h) boyunca integre edilmesi ile şu şekilde belirlenir.

$$\mathbf{N} = \int_{-h/2}^{+h/2} \boldsymbol{\sigma} dz = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \quad (6)$$

$$\mathbf{M} = \int_{-h/2}^{+h/2} \boldsymbol{\sigma} z dz = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$$

Bu denklemlerdeki \mathbf{A} , \mathbf{B} ve \mathbf{D} sırasıyla uzama rijitlik matrisi, eğilme-uzama çifti rijitlik matrisi ve eğilme rijitlik matrisi olup açık ifadeleri şu şekilde verilir.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \cdot (z_k - z_{k-1}) \quad (7)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (8)$$

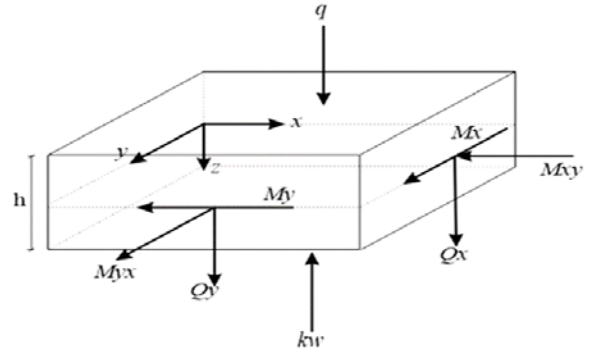
$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (9)$$

Bu ifadelerde z_k ve z_{k-1} , levhanın z doğrultusundaki kalınlık koordinatlarıdır (Şekil 2). Bu durumda kuvvet ve kuvvet çifti bileşenlerinin açık ifadeleri:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[\int_{z_{k-1}}^{z(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z(k)} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z dz \right] \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[\int_{z_{k-1}}^{z(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z(k)} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz \right] \quad (11)$$

şeklindedir.



Şekil 3. İç kuvvetler

Şekil 3' de gösterilen eksen takımı ve notasyonla, dikdörtgen kesitli, h kalınlıklı, Winkler elastik zeminine oturan simetrik çapraz tabakalı kompozit kalın plağa ait diferansiyel alan denklemleri kapalı formda denklem (12) ile verilebilir. Kalın plaklara ait alan denklemlerinin elde edilmesi ile ilgili detaylı bilgi [19, 20] de mevcuttur.

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - kw = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} - \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \left(M_x - \mu_{xy} M_y - \frac{h^2}{10} \mu_{xz} (q - kw) \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial y} - \frac{Q_{22}}{E_y D_{22}} \left(M_y - \mu_{yx} M_x - \frac{h^2}{10} \mu_{yz} (q - kw) \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} - \frac{Q_{11}}{G_{xy} D_{11}} M_{xy} = 0$$

$$\Omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{6}{5 G_{xz} h} Q_x = 0$$

$$\Omega_y + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{6}{5 G_{yz} h} Q_y = 0$$

3. Gâteaux Diferansiyeli ve Fonksiyonel

Elastik zemine oturan simetrik çapraz tabakalı kalın plağa ait bütün alan denklemleri sınır koşulları da dahil olmak üzere operator formda $\mathbf{Q} = \mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{f}$ şeklinde yazılabilir. Burada, \mathbf{L} türev operatörünü, \mathbf{u} yer değiştirmeler ve kesit tesirleri cinsinden bilinmeyenlere ait vektörü, \mathbf{f} ise yük vektörünü göstermektedir. Burada, \mathbf{Q} sürekli bir operatördür. Kompozit plaklar için dinamik sınır koşulları da; $\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}} = 0$; $\mathbf{Q} - \hat{\mathbf{Q}} = 0$ şeklinde ve geometrik sınır koşulları $-\boldsymbol{\Omega} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} = 0$; $-\mathbf{w} + \hat{\mathbf{w}} = 0$ şeklinde sembolik olarak verilebilir. \mathbf{Q}' nun potansiyel bir operatör olması için gerekli ve yeterli koşul [21] tarafından $\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*), \bar{\mathbf{u}} \rangle$ şeklinde verilmiştir. Eşitlikteki \langle, \rangle ifadesi iç çarpımı göstermektedir. \mathbf{Q} operatörün Gâteaux türevi

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^1 \langle \mathbf{Q}(s\mathbf{u}, \mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle ds \quad (13)$$

Burada s skaler bir büyüklüktür. Bu durumda elastik zemine oturan simetrik çapraz tabakalı kompozit kalın plağa ait alan denklemlerine karşı gelen fonksiyonelin açık formu şu şekildedir:

$$I(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} k [w, w] - [q, w] + [M_x, \Omega_{x,x}] + [M_{xy}, \Omega_{x,y}] + [M_{xy}, \Omega_{y,x}] + [M_y, \Omega_{y,y}] + [Q_x, \Omega_x] + [Q_y, \Omega_y] + [Q_x, w_x] - \frac{Q_{11}}{2 E_x D_{11}} \{ [M_x, M_x] - 2 \mu_{xy} [M_x, M_y] + [M_y, M_y] + 2(1 + \mu_{xy}) [M_{xy}, M_{xy}] \} + [Q_y, w_y] + \frac{Q_{11} h^2}{E_x D_{11} 10} \{ \mu_{xz} [q, M_x] + \mu_{yz} [q, M_y] - \frac{1}{2} \mu_{xz} k [w, M_x] - \frac{1}{2} \mu_{yz} k [w, M_y] \} - \frac{3}{5 G_{xz} h} [Q_x, Q_x] - \frac{3}{5 G_{yz} h} [Q_y, Q_y] - [\hat{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\Omega}]_{\sigma} - [\hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{w}]_{\sigma} - [(\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}), \mathbf{Q}]_{\varepsilon} - [(\boldsymbol{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\Omega}}), \mathbf{M}]_{\varepsilon} \quad (14)$$

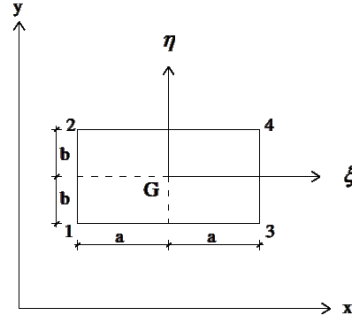
Fonksiyonelde σ ve ε alt indisli parantezler sırasıyla dinamik ve geometrik sınır koşullarını ifade etmektedir. Köşeli parantezler bölgede iç çarpımı gösterirler. $I(\mathbf{u})$ fonksiyonelinde yer alan son 4 terim sınır koşulları ile ilgili olup, açık halleri denklem (15) ile verilmiştir.

$$[\mathbf{Q}, \mathbf{w}] = [(Q_x n_x + Q_y n_y), w] \quad (15)$$

$$[\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega}] = [(M_x n_x + M_{xy} n_y), \Omega_x] + [(M_{xy} n_x + M_y n_y), \Omega_y]$$

4. Karışık Sonlu Eleman Formülasyonu

Sonlu elemanlar yönteminin kullanılmasındaki amaç; elemanın herhangi bir noktasındaki yer değiştirmeler ile elemanın düğüm noktaları yer değiştirmeleri arasındaki bağıntıları, şekil fonksiyonlarını kullanarak ifade etmektir. Dikdörtgen plak eleman (Şekil 4) için seçilen doğrusal şekil fonksiyonları denklem (16)' da tanımlanmıştır.



Şekil 4. Dikdörtgen plak elemanı

$$\Psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \quad (16)$$

$$\Psi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$\Psi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$\Psi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)$$

Fonksiyonelde yer alan bilinmeyenleri gösteren sembolik büyüklük (M) olmak üzere, $M = M_1 \Psi_1 + M_2 \Psi_2 + M_3 \Psi_3 + M_4 \Psi_4$; M_1, M_2, M_3 ve M_4 bilinmeyenlerin i nodunda aldığı değerleri göstermektedir.

Fonksiyonelde yer alan 8 değişkenin şekil fonksiyonları cinsinden tanımlanarak yerine konulması ve elde edilen ifadenin extremum olacak şekilde, bilinmeyenlerin nodal değerlerine göre türevlerinin alınarak sıfıra eşitlenmesi ile elde edilen eleman matrisi ve yük vektörü;

$$\begin{matrix} M_x & M_y & M_{xy} & Q_x & Q_y & \Omega_x & \Omega_y & w \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \quad (17)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2\gamma_1 [k_1] & \gamma_2 [k_1] & 0 & 0 & 0 & [k_2]^T & 0 & \frac{k}{2} \gamma_7 [k_1] \\ \gamma_2 [k_1] & 2\gamma_2 [k_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & [k_3]^T & \frac{k}{2} \gamma_8 [k_1] \\ 0 & 0 & 2\gamma_4 [k_1] & 0 & 0 & [k_3]^T & [k_2]^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma_5 [k_1] & 0 & [k_1] & 0 & [k_2]^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma_6 [k_1] & 0 & [k_1] & [k_3]^T \\ [k_2] & 0 & [k_3] & [k_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k_3] & [k_2] & 0 & [k_1] & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{2} \gamma_7 [k_1] & \frac{k}{2} \gamma_8 [k_1] & 0 & [k_2] & [k_3] & 0 & 0 & k [k_1] \end{bmatrix}$$

Yük vektörü

$$\begin{bmatrix} \gamma_7 [k_1] q \\ \gamma_8 [k_1] q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [k_1] q \end{bmatrix}$$

şeklinde. Burada $[k_1]$, $[k_2]$, $[k_3]$ eleman matrisini oluşturan alt matrislerdir. Eleman matrisi ve yük vektöründeki γ_i ifadelerinin açık halleri ise denklem (18)'de verilmiştir.

$$\gamma_1 = -\frac{Q_{11}}{2E_x D_{11}}; \gamma_2 = \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \mu_{xy} \quad (18)$$

$$\gamma_3 = -\frac{Q_{11}}{2E_x D_{11}} \frac{\mu_{xy}}{\mu_{yx}}; \gamma_4 = -\frac{Q_{11}}{2D_{11} G_{xy}}$$

$$\gamma_5 = -\frac{3}{5G_{xz} h}; \gamma_6 = -\frac{3}{5G_{yz} h}$$

$$\gamma_7 = -\frac{1}{E_x D_{11}} \frac{Q_{11}}{\mu_{xz}} \frac{h^2}{10}; \gamma_8 = -\frac{1}{E_y D_{22}} \frac{Q_{22}}{\mu_{yz}} \frac{h^2}{10}$$

5. Dinamik Analiz

Gâteaux türevine bağlı olarak geliştirilen formülasyon dinamik problemler için özdeğer-özvektör problemine dönüşür.

$$[\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}] = \{0\} \quad (19)$$

Bubağıntıda $[\mathbf{K}]$ sistem matrisini, $[\mathbf{M}]$ kütle matrisini, ω açısal frekansı temsil etmektedir. Kütle matrisinin açık ifadesi $[\mathbf{M}] = \rho h [k_1]$ şeklindedir. Bu bağıntıda, ρ yoğunluk, h ise plak kalınlığıdır. Denklem (14) ile verilmiş olan $I(\mathbf{u})$ fonksiyoneliinde $[q, w]$ terimi dinamik analizde;

$$[q, w] = \frac{1}{2} \rho \omega [w, w] \quad (20)$$

şeklinde. Denklem (19) matris formunda yazılırsa;

$$\left(\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [\mathbf{M}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (21)$$

elde edilir. Denklem (21) de $\{f\}$ sistem matrisindeki momentleri, kesme kuvvetlerini ve dönmeleri, $\{w\}$ ise çökmeleri göstermektedir. Bu bağıntıdan yararlanılarak;

$$([\mathbf{K}^*] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{w\} = \{0\} \quad (22)$$

$$[\mathbf{K}^*] = [\mathbf{K}_{22}] - [\mathbf{K}_{12}]^T [\mathbf{K}_{11}]^{-1} [\mathbf{K}_{12}]$$

denklemini elde edilir. Denklem (22) de $[\mathbf{K}^*]$ indirgenmiş sistem matrisidir.

6. Sayısal Örnekler

Bu bölümde geliştirilen karışık sonlu eleman formülasyonunun doğrulanması amacıyla FORTRAN programlama dilinde tarafımızdan kodlanmış program kullanılarak çeşitli simetrik tabakalanma, çeşitli plak malzeme ve plak geometri durumları kullanılarak örnek problemler çözülmüştür. Sayısal örneklerde, simetri koşulu kullanılarak dörtte bir kare plak için çözümler yapılmış ve mesnetlenme koşulu olarak plağın tüm kenarları basit mesnet (SSSS) olarak alınmıştır. Analizlerde 10×10 sonlu eleman ağı kullanılmış ve plak $q=5 \delta(t)$ kN/m² düzgün yayılı yük altında incelenmiştir.

Sayısal uygulamalarda, ilk üç problemin çözümünde temel amaç, geliştirilen karışık sonlu eleman formülasyonunun ve kodlanmış bilgisayar programının doğruluğunun, literatürdeki mevcut izotrop ve ortotrop tek tabakalı kalın plak problem çözümleriyle kıyaslanarak test edilmesidir. Diğer örneklerde ise temel amaç, Winkler elastik zeminine oturan simetrik çapraz tabakalı kompozit kalın plaklar için, h en kesit yüksekliği ve $2a$ en kesit genişliği olmak üzere; farklı $2a/h$ oranlarının, farklı tabaka dizilişlerinin ve farklı Winkler zemin parametre değerlerinin serbest titreşim analizi üzerindeki etkilerini incelemektir.

Örnek 1:

Bu örnekte tek tabakalı izotrop ve ortotrop kalın kare plak incelenmiştir. Ortotrop plak için malzeme özellikleri; $E_1=25E_2$, $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$, $G_{23}=0.2E_2$, $\mu_{12}=0.25$ olarak ve izotrop malzeme için $\mu=0.30$ olarak alınmıştır. Denklem (23) ile verilen eşitlik kullanılarak tek tabakalı izotrop ve ortotrop kalın plağa ait doğal titreşim frekans değerleri boyutsuzlaştırılmıştır. Elde edilen frekans değerleri, [2] çalışmasının sonuçları ile birlikte açıklık/kalınlık oranı, $2a/h=10$ için Tablo 1'de sunulmuştur.

$$\bar{\omega} = \omega ((2a)^2/h) \sqrt{\rho/E_2} \quad (23)$$

Tablo 1. Tek tabakalı basit mesnetli kalın plağa ait boyutsuzlaştırılmış frekans değerleri

	$\bar{\omega}$		
	[2]	Mevcut Çalışma	Fark (%)
İzotrop	5.812	5.704	1.8
Ortotrop	12.452	12.501	0.4

Örnek 2:

Bu örnekte dört kenarından basit mesnetlenmiş, dört eşit kalınlıkta tabakadan oluşan kompozit kare plak incelenmiştir. Plak malzeme özellikleri; $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\mu_{12}=0.25$ şeklindedir. Tabaka dizilişi $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ şeklinde olan kare plak

10x10 sonlu eleman ağına bölünmüş ve denklem (23) ile verilen eşitlik kullanılarak simetrik çapraz tabakalı kompozit kalın plağa ait doğal titreşim frekans değerleri boyutsuzlaştırılmıştır. Elde edilen boyutsuz frekans değerleri $2a/h=5$ için [22] çalışmasının sonuçları ile birlikte farklı E_1/E_2 oranları için Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2. Farklı E_1/E_2 oranları için simetrik çapraz tabakalı ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) kompozit kalın plağa ait boyutsuz frekans değerleri

$\frac{E_1}{E_2}$	$\bar{\omega}$		
	[22]	Mevcut Çalışma	Fark (%)
10	8.340	8.410	0.8
20	9.613	9.671	0.6
30	10.372	10.435	0.6
40	10.899	10.912	0.1

Tablo 1 ve Tablo 2 incelendiğinde, simetrik çapraz tabakalı kompozit kalın plakların karışık sonlu elemanlar yöntemiyle dinamik analizinden elde edilen sonuçların literatürdeki mevcut çalışmaların sonuçları ile yeterli yakınsaklıkta ve uygun değerlerde olduğu gözlenmiştir.

Örnek 3:

Bu örnekte Winkler elastik zeminine oturan dört kenarından basit mesnetlenmiş simetrik çapraz tabakalı kompozit kalın kare plak incelenmiştir. Zemin yataklanma katsayısı, $k=5000$ kN/m³ olup, plak malzeme özellikleri; $E_1=25E_2$, $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$, $G_{23}=0.2E_2$, $E_2=10^6$ kN/m² ve $\mu_{12}=0.25$ şeklindedir. Tabaka dizilişi $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ şeklinde olan kalın plağa ait doğal titreşim frekans değerleri denklem (23) ile verilen eşitlik kullanılarak boyutsuzlaştırılmıştır. Elde edilen boyutsuz frekans değerleri farklı açıklık/kalınlık oranları ($2a/h$) için Tablo 3'de ve $2a/h=10$ iken farklı Winkler zemin katsayı değerleri için Tablo 4'de sunulmuştur.

Tablo 3. Farklı açıklık/kalınlık oranları için Winkler zeminine oturan simetrik çapraz tabakalı ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) kompozit kalın plağın boyutsuz frekans değerleri

$\frac{2a}{h}$	$\bar{\omega}$	
	Mevcut Çalışma	
5	55.254	
10	223.235	
20	893.096	

Tablo 4. Farklı zemin parametre değerleri için simetrik çapraz tabakalı ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) kompozit kalın plağın boyutsuz frekans değerleri

k (kN/m ³)	$\bar{\omega}$	
	Mevcut Çalışma	
5	14.134	
50	25.371	
500	71.326	

Örnek 4:

Bu örnekte Winkler elastik zeminine oturan dört kenarından basit mesnetlenmiş simetrik çapraz tabakalı kompozit kalın plak incelenmiştir. Zemin yataklanma katsayısı, $k=500$ kN/m³ olup, plak malzeme özellikleri; $E_1=25E_2$, $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$, $G_{23}=0.2E_2$, $E_2=10^6$ kN/m² ve $\mu_{12}=0.25$ şeklindedir. Açıklık/kalınlık oranı; $2a/h=10$ olan kare plak 10x10 sonlu eleman ağına bölünmüş ve sonuçlar farklı tabakalanma durumları için Tablo 5'de sunulmuştur.

Tablo 5. Farklı tabakalanma durumları için çapraz tabakalı kompozit kalın kare plağın boyutsuz frekans değerleri

Tabakalanma Tipi	$\bar{\omega}$	
	Mevcut Çalışma	
$90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ$	72.025	
$0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$	71.414	
$0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$	71.326	

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada Gâteaux diferansiyel yöntemi kullanılarak Winkler elastik zeminine oturan simetrik çapraz tabakalı kompozit kalın plakların serbest titreşim analizi için fonksiyonel elde edilmiştir. Bu fonksiyonelde 8 bağımsız değişkene ek olarak, elastik zemin katsayısı bulunmaktadır. Elde edilen fonksiyonelin çözümü için karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Fonksiyonel içinde değişkenlerin sadece birinci türevleri bulunduğu için bu değişkenlere karşı doğrusal interpolasyon fonksiyonları seçilmiştir.

Dört düğüm noktalı toplam otuz iki serbestlik dereceli tabakalı kompozit kalın plak için eleman matrisi elde edilmiştir. Elde edilen karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılarak elastik zemine oturan simetrik çapraz tabakalı kompozit kalın plakların serbest titreşim davranışı incelenmiş ve sayısal çözümler literatürdeki mevcut izotrop ve ortotrop tek tabakalı plak sonuçları ile karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Analizlerde simetrik çapraz tabakalı kompozit kalın plak-zemin etkileşim problemleri, farklı tabaka açısı ve sayıları, farklı $2a/h$ ve E_1/E_2 oranları için FORTRAN programlama dilinde tarafımızdan kodlanmış program kullanılarak çözülmüştür.

Kaynakça

- [1] Jones, M. R. 1999. Mechanics of Composite Materials. Taylor & Francis.
- [2] Reddy, J. N. 2004. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. 2nd edition, CRC Press.
- [3] Kaw, A. K. 2006. Mechanics of Composite Materials. Taylor & Francis.

- [4] Wang, Y. H., Tham, L. G., Cheung, Y. K. 2005. Beams and Plates on Elastic Foundations: A Review, *Progress in Structural Engineering and Materials*, 7 (4), 174-182.
- [5] Vlasov, V. Z., Leont'ev, N. N. 1966. Beams, Plates and Shells on Elastic foundations. Israel Program for scientific translations, Jerusalem (translated from Russian).
- [6] Kerr, A. D. 1964. Elastic and Viscoelastic Foundation Models. *Journal of Applied Mechanics*, 491-498.
- [7] Sofiyev, A. H. 2014. On the buckling of composite conical shells resting on the Winkler-Pasternak elastic foundations under combined axial compression and external pressure. *Composite Structures*, 113, 208-215.
- [8] Winkler, E. 1867. Die Lehre von der Elasticitnet und Festikeit. Prag, Dominicus.
- [9] Wen, P. H., Aliabadi, M. H. 2009. Boundary Element Formulations for Mindlin Plate on an Elastic Foundation with Dynamic Load. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33, 1161-1170.
- [10] Liew, K. M., Han, J-B., Xiao, Z. M., Du, H. 1996. Differential Quadrature Method for Mindlin Plates on Winkler Foundations. *Journal of Mechanical Sciences*, 38 (4), 405-421.
- [11] Cheung, Y. K., Zienkiewicz, O. C. 1965. Plates and Tanks on Elastic Foundations-An Application of Finite Element Method. *International Journal of Solids and Structures*, 1, 451-61.
- [12] Barros, J. A. O., Barreiros Martins, J. 1990. Analysis of Plates on Elastic Foundation by the Finite Element Method. *EPMESC III, Macau*, 4, 815-824.
- [13] Liu, F. L. 2000. Rectangular Thick Plates on Winkler Foundation: Differential Quadrature Element Solution. *International Journal of Solids and Structures*, 37, 1743-1763.
- [14] Lovadina, C. 1996. A New Class of Mixed Finite Element Methods for Reissner-Mindlin Plates. *Siam Journal on Numerical Analysis*, 33, 2457-2467.
- [15] Aköz, A. Y., Özütok, A. 2000. A Functional for Shells of Arbitrary Geometry and A Mixed Finite Element Method for Parabolic and Circular Cylindrical Shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, 1933-81.
- [16] Aköz, A. Y., Özçelikörs, Y. 1985. Plaklar için Genelleştirilmiş Fonksiyoneller ve Yeni Sonlu Eleman Formülasyonu. IV. Ulusal Mekanik Kongresi, Bayramoğlu-Kocaeli, 113-23.
- [17] Eratlı, N., Aköz, A. Y. 1997. The Mixed Finite Element Formulation for the Thick Plates on Elastic Foundation. *Computers & Structures*, 65 (4), 515-529.
- [18] Eratlı, N., Aköz A. Y. 2002. Free Vibration Analysis of Reissner Plates by Mixed Finite Element. *Structural Engineering and Mechanics*, 13 (3), 277-298.
- [19] Panc, V. 1975. Theories of Elastic Plates. Noordhoff International, Holland.
- [20] Satır, N. 2011. Çapraz Tabakalı Kompozit Dikdörtgen Plakların Dinamik Analizi. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- [21] Oden, J. D., Reddy, J. N. 1976. Variational Methods in Theoretical Mechanics. Springer, Berlin.
- [22] Ferreira, A. J. M., Roque, C. M., Jorge, R. M. N. 2005. Free Vibration Analysis of Symmetric Laminated Composite Plates by FSDT and Radial Basis Functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 4265-4278.

Semboller

ω	Açısal Frekans
$\delta(t)$	Birim Adım Fonksiyonu
$\bar{\omega}$	Boyutsuz Açısal Frekans
ξ, η	Doğal Koordinat Takımı
[K]	Dikdörtgen Eleman Matrisi
a,b	Dikdörtgen Sonlu Eleman Boyutları
q	Düşey yayılı yük
w	Düşey yer değiştirme
M_{ij}	Eğilme Momenti
D_{ij}	Eğilme Rijitlik Matrisi
B_{ij}	Eğilme-Uzama Çifti Rijitlik Matrisi
κ	Eğrilik
E_i	Elastisite Modülü
k	Elastik Zemin Katsayısı
I	Fonksiyonel
σ_i	Gerilme bileşeni
[,]	İç çarpım
[K*]	İndirgenmiş Sistem Matrisi
Q_{ij}	Katman Elastik Sabitleri
τ_{ij}	Kayma Gerilmesi
G_{ij}	Kayma Modülü
γ_{ij}	Kayma Şekil Değiştirmesi
Q_i	Kesme Kuvveti
[M]	Kütle Matrisi
Q	Operatör
h	Plak Kalınlığı
μ_{ij}	Poisson Oranı
ϵ_i	Şekil değiştirme bileşeni
Ω_i	Şekil değiştirme (dönme) büyüklükleri
Ψ_i	Şekil Fonksiyonları
A_{ij}	Uzama Rijitlik Matrisi
ρ	Yoğunluk